Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,

Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium zu Parchim.

Vierter Theil. Erste Abtheilung.

Elemente der ebenen Trigonometrie.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.

Dessau.

Verlag von A. Desbarats.

1867.

Vorwort.

In der vorliegenden Bearbeitung ist die ebene Trigonometrie zunächst nur als Ausbau des letzten Capitels der Planimetrie, die Dreiecksberechnung als ihre wichtigste Aufgabe hingestellt worden. Die vorläufige Betrachtung dieser Aufgabe führt unmittelbar zur Definition des Sinus; die Nothwendigkeit, von allen Winkeln die Sinus und ähnliche Funktionen berechnen, außerdem mit letzteren zweckmäßig operiren zu können, bildet den leitenden Gedanken der Goniometrie, und an diese schließt sich die angewandte Trigonometrie gleichsam wie die eigentliche Aufgabe an die vorbereitende Rechnung. Hiernach erscheint die Trigonometrie nicht als ein ganz neues, fremdartiges Gebiet; sie knüpft an Bekanntes an, und ihre Begränzung ist ziemlich eng, so daß die Aufgabe, in diesem engen Gebiete heimisch zu werden, nur mäßige Schwierigkeiten bietet. Die Einsicht, daß die Bedeutung der Trigonometrie viel weiter geht, daß z. B. die Goniometrie in merkwürdige Beziehungen zu anderen Theilen der Mathematik tritt, die bloße Dreiecksberechnung nur den Schluß der mannichfaltigsten physikalischen und geodätischen Aufgaben bildet, wird durch die voraufgegangene engere Definition weder ausgeschlossen, noch erschwert. Eine derartige Fortsetzung der Trigonometrie nach der einen oder anderen Seite wird jedoch dem mündlichen Vortrage überlassen bleiben können.

Unter den getroffenen Abänderungen der Darstellung braucht nur eine einzige besonders angeführt zu werden. Sie betrifft das zweite Capitel, welches von der allgemeineren Bedeutung der Sinus und Cosinus handelt. Die frühere Darstellung ging vom Einzelnen zum Allgemeinen über und war wissenschaftlich streng, aber ermüdend. Die jetzige Darstellung entwickelt das allgemeine Gesetz und leitet aus demselben den einzelnen Fall ab.

H. Gerlach.

Inhalt.

Ebene Trigonometrie.

Elemente

der

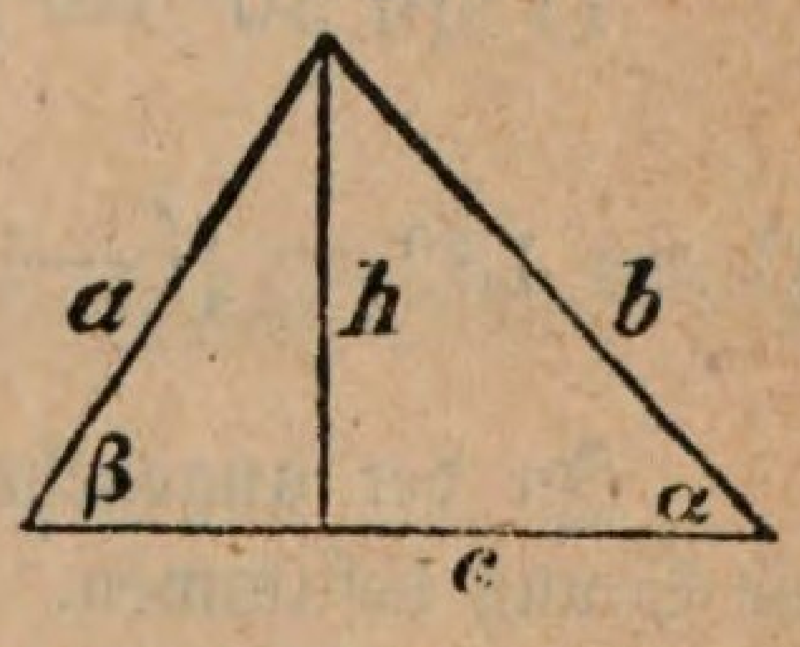
ebenen Trigonometrie.

Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

Die Aufgabe, aus drei bekannten Stücken eines Dreiecks die übrigen zu finden, wird in der Planimetrie im Allgemeinen auf dem Wege der Construction, und nur in einigen besonderen Fällen auch auf dem Wege der Rechnung gelöst. Es entsteht nun die Frage, ob das letztere Verfahren nicht in allen Fällen angewendet werden könne. Die Möglichkeit hängt offenbar davon ab, ob man im Stande ist, die gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel von einander durch eine Gleichung darzustellen. Zu einer derartigen Gleichung gelangt man aber durch folgende Betrachtung.

Fig. 1.



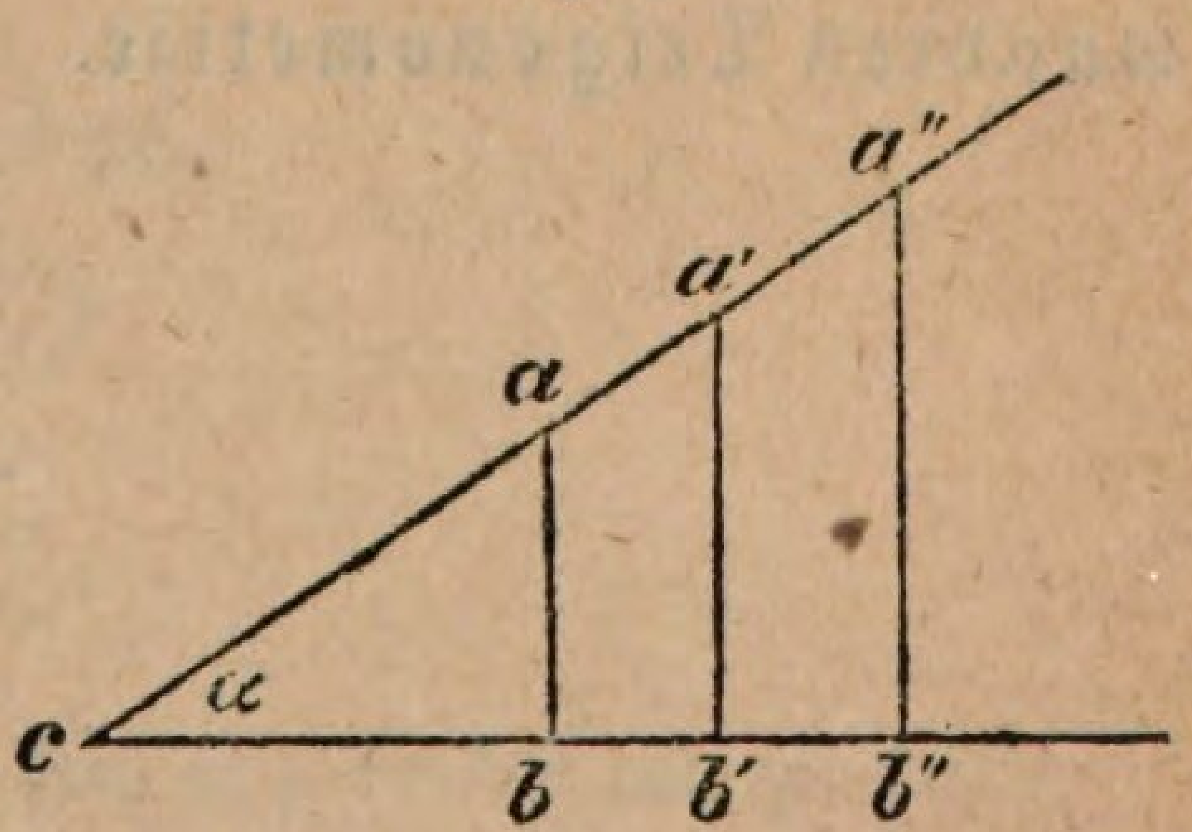
Es seien a, b, c die Seiten eines Dreiecks, α und β die Gegenwinkel von a und b, h die zu c gehörige Höhe. Dann ist

$$a : b = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{h}{b} : \frac{h}{a}.$$

Diese analytische Gleichung bekommt eine besondere Bedeutung dadurch, daß die Größe der Quotienten (h:b) und (h:a) nur von der Größe der Winkel β und α abhängig ist.

Stehen nämlich (Fig. 2) die Linien ab, a′b′, a″b″ senkrecht auf cb″, so ist

Fig. 2.



$$ab : ac = a'b' : a'c = a''b'' : a''c,$$

und diese Quotienten haben also ein und denselben Werth, der nur von dem Winkel α, nicht von der Lage der Punkte a, a′, a″ abhängt.

Die erwähnten Quotienten (h : b) und (h : a) können also gefunden werden,

ohne daß man das ganze Dreieck kennt; es müssen nur die Winkel α und β gegeben sein.

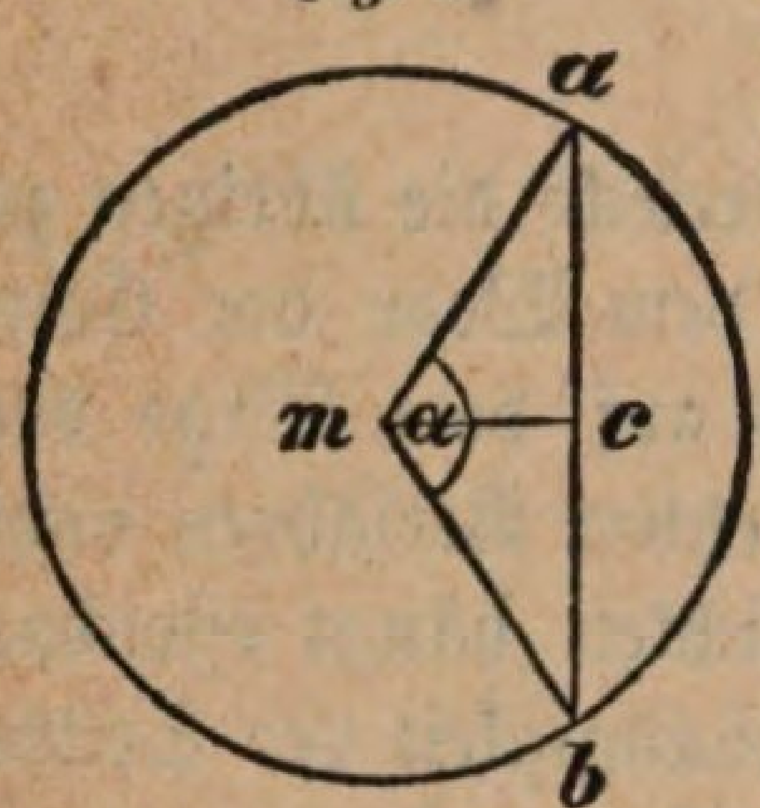
Bezeichnet man den Quotienten h : b, der nur von α abhängig ist, durch sin α (Sinus α), ebenso den Quotienten h : a durch sin β, so ist die Abhängigkeit der Seiten und Winkel von einander ausgedrückt durch die Gleichung

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta,$$

deren Brauchbarkeit allerdings davon abhängt, ob es möglich ist, die Sinus aller Winkel zu berechnen.

Einige derselben lassen sich unmittelbar aus planimetrischen Sätzen ableiten. Ist nämlich für den bestimmten Centriwinkel α die Größe der zugehörigen Sehne ab bekannt, und zwar in Form des Ausdrucks p . r, wo r den Radius, p einen Zahlenfaktor bedeutet, so ist

Fig. 3.



$$\sin\frac{\alpha}{2} = ac : am = \tfrac{1}{2}(p . r) : r = \tfrac{1}{2}p.$$

Da man nun den Faktor p kennt, wenn ab die Seite eines eingeschriebenen regulären Dreiecks, Vierecks, Fünfecks u. s. w. bezeichnet (Planimetrie Cap. XIII, §§. 159 und 160), so ist folglich

$$1)\ \sin 30^0 = \tfrac{1}{2};\quad 2)\ \sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2};\quad 3)\ \sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$4)\ \sin 18^0 = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5});\quad 5)\ \sin 36^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}};\ \text{u. s. w.}$$

In der angegebenen Art lassen sich noch von vielen anderen Winkeln die Sinus bestimmen. Man kann jedoch die Rechnung vereinfachen, wenn man vorher untersucht, welche Eigenschaften den Sinus zukommen.

Diese und ähnliche Untersuchungen bilden den Inhalt der **analytischen Trigonometrie** oder der **Goniometrie**, die Berechnung der unbekannten Stücke eines Dreiecks aus den bekannten den Inhalt der **angewandten Trigonometrie**.

A. Analytische Trigonometrie.

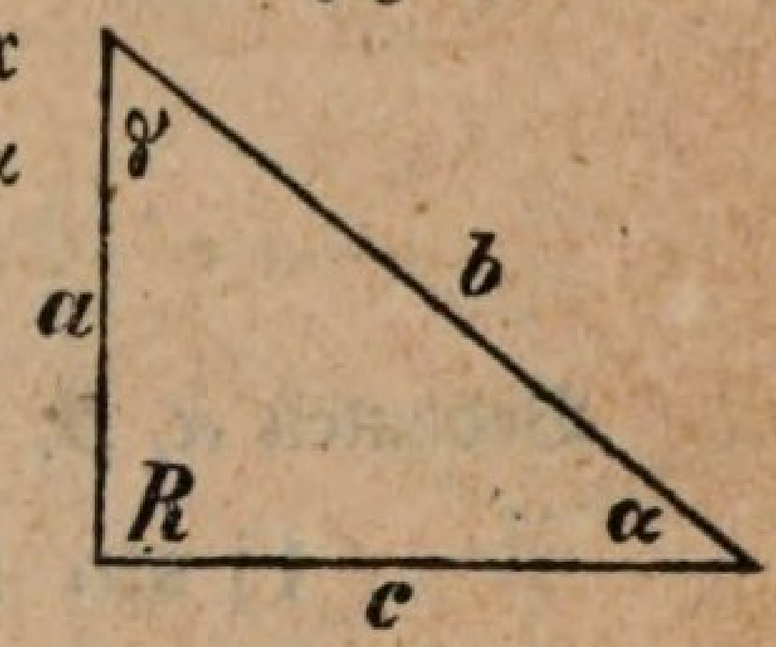
Erstes Capitel.

Von den Sinus und Cosinus der spitzen Winkel.

§. 1. Erklärung.

Ist a, b, c ein rechtwinkliges Dreieck, so versteht man unter sin α (Sinus α) das Verhältniß der dem Winkel α gegenüberliegenden Cathete a zur Hypotenuse b, unter cos α (Cosinus α) das Verhältniß der dem Winkel α anliegenden Cathete zur Hypotenuse. Daher ist

Fig. 4.



$$\sin\alpha = \frac{a}{b};\ \cos\alpha = \frac{c}{b};$$

$$\text{ferner } \sin\gamma = \frac{c}{b};\ \cos\gamma = \frac{a}{b}.$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß

$$\sin\alpha = \cos\gamma,$$

oder, da $\gamma = R - \alpha$ ist,

$$\text{daß } \sin\alpha = \cos(R - \alpha),$$
$$\sin(45 + x) = \cos(45 - x),$$

daß also der Sinus eines beliebigen spitzen Winkels gleich dem Cosinus seines Complements ist.

Außerdem folgen die Sätze:

$$a = b\sin\alpha;\quad c = b\sin\gamma.$$

Anm. Aus der gegebenen Erklärung folgt, daß die Sinus und Cosinus der spitzen Winkel ächte Brüche sind und nur einen Werth haben, ferner daß bei wachsendem Winkel die Sinus ebenfalls wachsen, die Cosinus abnehmen. (Vergl. Planimetrie, §. 34.)

§. 2. Lehrsätze.

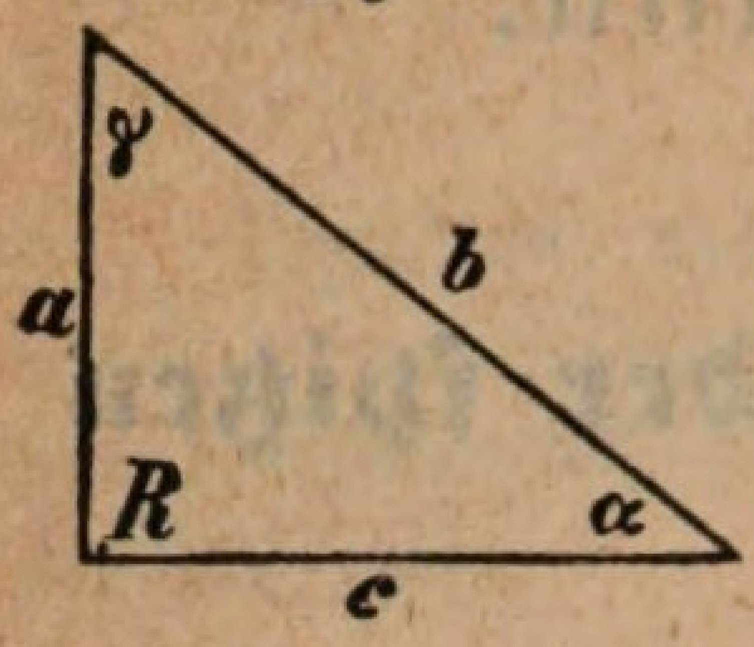
1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;*)

2) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$;

3) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

*) $\sin^2\alpha$ ist die kürzere Schreibart für $(\sin\alpha)^2$, $\cos^2\alpha$ für $(\cos\alpha)^2$.

Fig. 5.



Beweis zu 1. Es ist

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2} = 1.$$

Beweise zu 2 und 3. Dieselben folgen aus 1.

Anm. Sind die Sinus der Winkel bis zu 45° bekannt, also nach 3) dieses §. auch die Cosinus derselben, so sind letztere zugleich die Werthe der Sinus für die spitzen Winkel, welche größer als 45° sind (nach §. 1), und diese Sinus brauchen daher nicht weiter berechnet zu werden.

§. 3. Lehrsätze.

Bedeuten α, β, $(\alpha + \beta)$ und $(\alpha - \beta)$ spitze Winkel, so ist

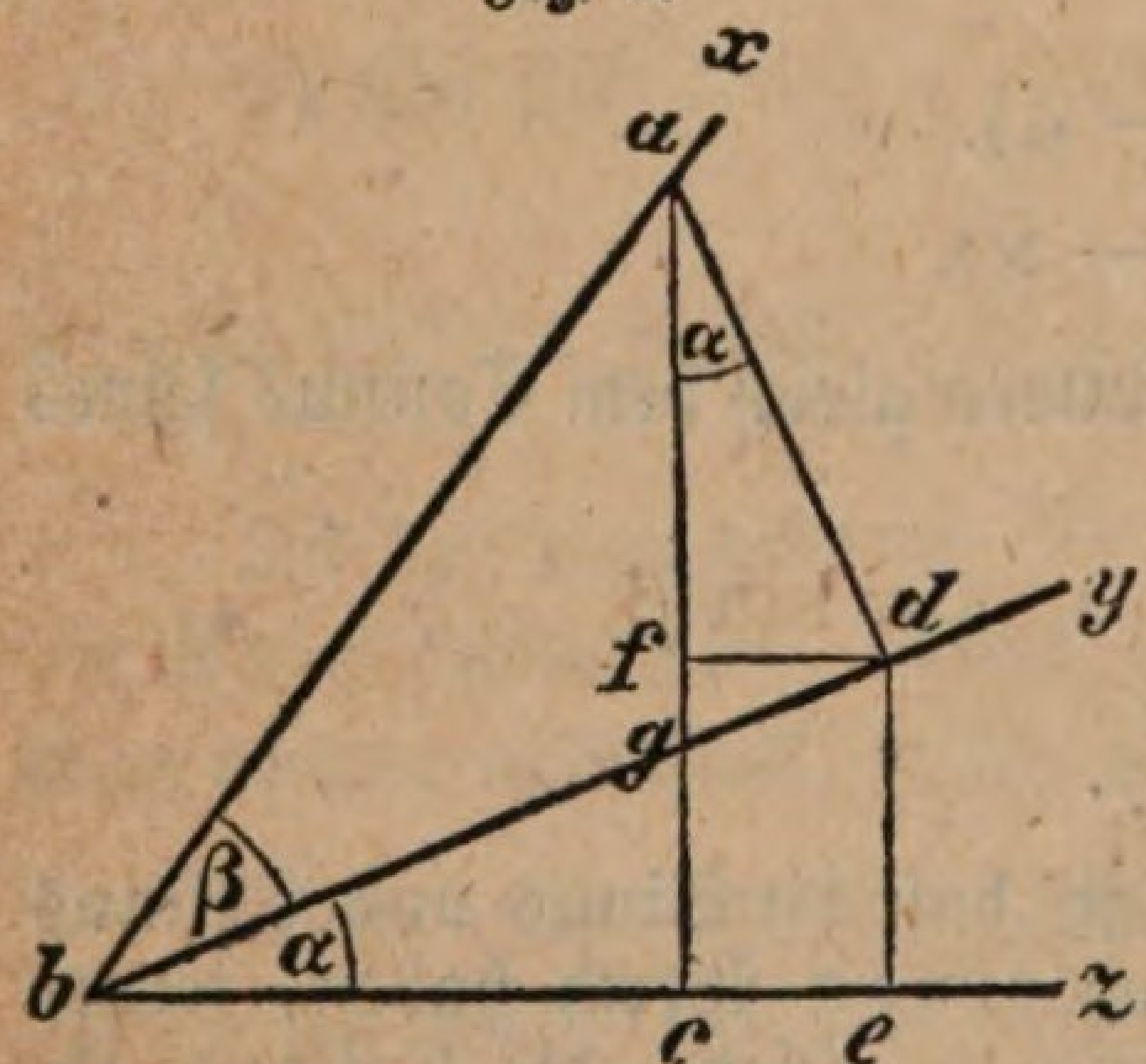
1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$;

2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$;

3) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$;

4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Fig. 6.



Beweis zu 1. Ist $\sphericalangle\, ybz = \alpha$, $\sphericalangle\, xby = \beta$, also $\sphericalangle\, xbz = (\alpha + \beta)$, so fälle man, um die Sinus und Cosinus dieser Winkel zu erhalten, aus einem beliebigen Punkte a der Linie xb die Senkrechten ac und ad auf bz und by, ferner aus d die Senkrechten de und df auf bz und ac, letzteres, weil $\sphericalangle$ gad wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke gbc und gad durch α bezeichnet werden kann. Dann ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{ac}{ab} = \frac{de}{ab} + \frac{af}{ab}.$$

Hierbei ist $de = \sin\alpha \,.\, bd$,

$af = \cos\alpha \,.\, ad$,

daher $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \frac{bd}{ab} + \cos\alpha \,.\, \frac{ad}{ab}$$

$$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Beweis zu 2. Es ist nach Fig. 6

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{bc}{ab}=\frac{be}{ab}-\frac{fd}{ab}.$$

Hierbei ist $be=\cos\alpha\,.\,bd$

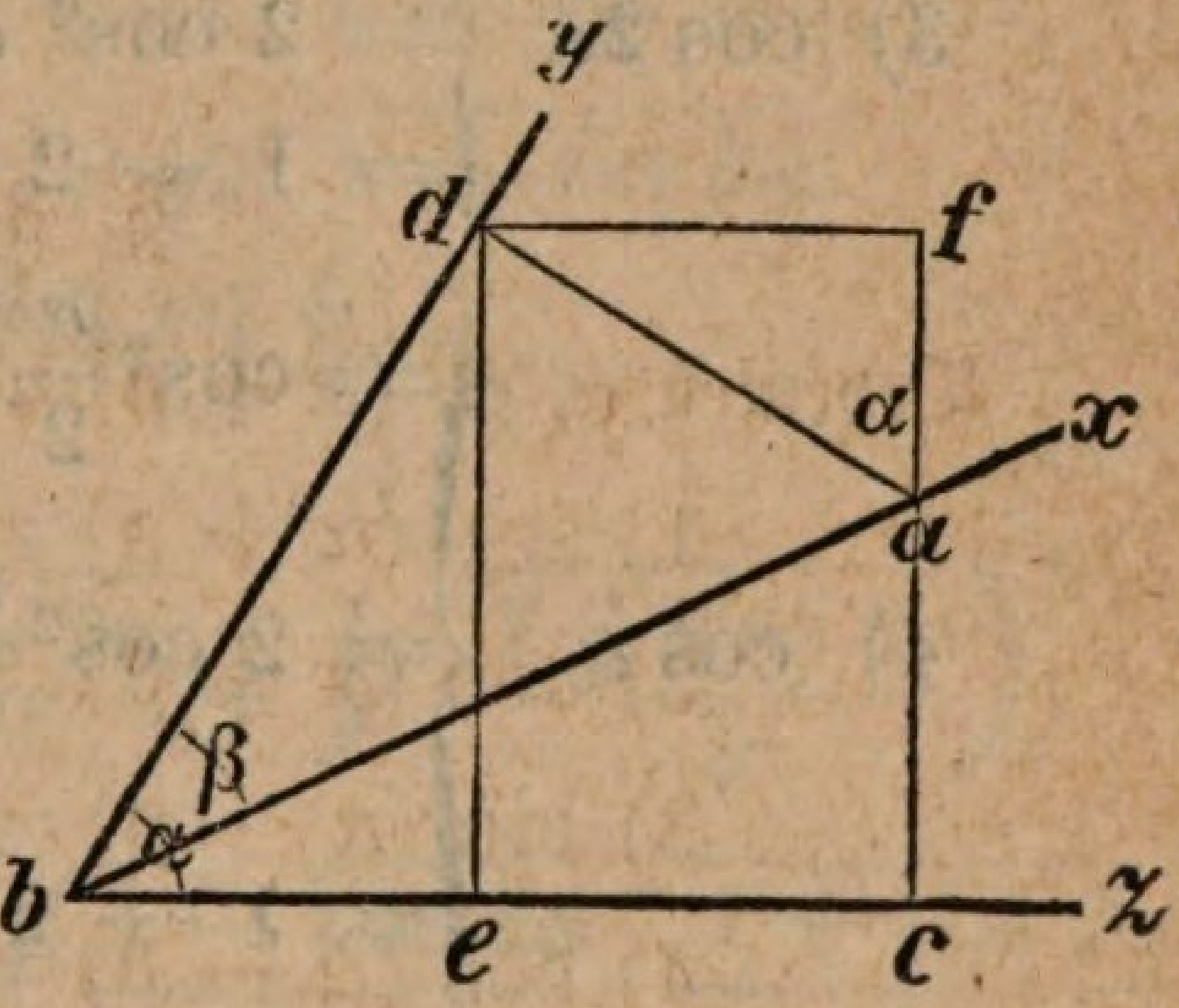
$fd=\sin\alpha\,.\,ad,$

daher $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,.\,\frac{bd}{ab}-\sin\alpha\,.\,\frac{ad}{ab}$$

$$=\cos\alpha\,.\,\cos\beta-\sin\alpha\,.\,\sin\beta.$$

Beweis zu 3. Ist $\sphericalangle\, ybz=\alpha$, $\sphericalangle\, xby=\beta$, also $\sphericalangle\, xbz=(\alpha-\beta)$, so fälle man wie bei 1) aus einem beliebigen Punkte a der Linie xb die Senkrechten ac und ad auf bz und by, ferner aus d die Senkrechten de und df auf bz und ac, letzteres, weil $\sphericalangle$ gad wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke gbc*) und gad durch α bezeichnet werden kann. Dann ist

Fig. 7.



$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{ac}{ab}=\frac{de}{ab}-\frac{af}{ab}.$$

Hierbei ist $de=\sin\alpha\,.\,bd$

$af=\cos\alpha\,.\,ad,$

daher $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\,.\,\frac{bd}{ab}-\cos\alpha\,.\,\frac{ad}{ab}$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Beweis zu 4. Es ist nach Fig. 7

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{bc}{ab}=\frac{be}{ab}+\frac{fd}{ab}.$$

Hierbei ist $be=\cos\alpha\,.\,bd,$

$fd=\sin\alpha\,.\,ad,$

daher $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,.\,\frac{bd}{ab}+\sin\alpha\,.\,\frac{ad}{ab}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

---

*) g bezeichnet den Durchschnittspunkt der verlängerten Linien bd und ca, der in Fig. 7 nicht angegeben ist.

Anm. Die Beweise zu 3) und 4) stimmen bis auf die Vorzeichen mit den Beweisen zu 1) und 2) überein. — Die Sätze 2) und 4) lassen sich auch aus 1) und 3) nach §. 2 ableiten, ferner die Sätze 1) und 3) aus dem Ptolemäischen Lehrsatze.

§. 4. Lehrsätze.

1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$

2) $\sin\alpha = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2};$

3) $\cos 2\alpha \begin{cases} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \\ = 2 \cos^2 \alpha - 1; \\ = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \end{cases}$

4) $\cos \alpha \begin{cases} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}; \\ = 2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1; \\ = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \end{cases}$

5) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$

6) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$

Beweis zu 1. Er folgt aus 1) des §. 3, wenn man $\beta = \alpha$ setzt.

Beweis zu 2. Er folgt aus 1), wenn man $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ setzt.

Beweis zu 3. Setzt man in 2) des §. 3 $\beta = \alpha$, so ist

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Ferner ist $\cos^2\alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, aber auch $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Beweis zu 4. Er folgt aus 3.

Beweis zu 5. Es ist

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin (2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos\alpha \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 2 \sin\alpha(1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 3 \sin\alpha - 4 \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Beweis zu 6. Er wird in ähnlicher Art geführt, wie der Beweis zu 5.

§. 5. Lehrsätze.

1) $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$;

2) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$;

3) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1+\sin 2\alpha}$;

4) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{1-\sin 2\alpha}$;

5) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 2\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 2\alpha}$;

6) $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 2\alpha}$.

Beweise zu 1 und 2. Sie folgen aus 3 des §. 4.

Beweis zu 3. Es ist

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + 2\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$= 1 + \sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = 1 + \sin 2\alpha$, daher

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1+\sin 2\alpha}.$$

Beweis zu 4. Er wird geführt, wie der Beweis zu 3.

Beweise zu 5 und 6. Sie folgen aus 3 und 4.

§. 6. Zusatz.

Die bisher entwickelten Formeln, besonders 5) und 6) des §. 5 und 1—4) des §. 3 geben ein Mittel, um aus wenigen bekannten Sinus die Sinus und Cosinus aller spitzen Winkel zu finden. Aus $\sin 30^0$ erhält man nach 5) des §. 5 die Sinus von 15^0, $7\frac{1}{2}^0$, $3\frac{3}{4}^0$ u. s. w.; aus $\sin 36^0$ die Sinus von 18^0, 9^0, $4\frac{1}{2}^0$, $2\frac{1}{4}^0$ u. s. w.; aus den Sinus und Cosinus der Winkel 18^0 und 15^0 erhält man $\sin 3^0$; aus $\sin 3^0$ erhält man $\sin 1^0$ durch Auflösung der Gleichung $\sin 3^0 = 3 \,.\, \sin 1^0 - 4(\sin 1^0)^3$ (Vergl. §. 4, 5).

Ein bequemeres Mittel zur Berechnung der Sinus und Cosinus bieten jedoch die unendlichen Reihen. Ist nämlich die Größe eines Winkels nicht

in Graden gegeben, sondern durch die Bogenlänge für den Radius 1 ausgedrückt, so erhält man:*)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Anm. In den üblichen Tafeln findet man nicht die Sinus und Cosinus selbst, sondern ihre Logarithmen, und da letztere für ächte Brüche negativ sein müssen, so ist zur Bequemlichkeit der Rechnung jedesmal die Zahl 10 hinzuaddirt, welche bei weiterer Rechnung wieder zu subtrahiren ist. Es ist z. B. $\log \sin x = -0{,}3567822$; in der Tafel findet man folglich die Zahl $9{,}6432177 = -0{,}3567822 + 10$, und man hat daher bei Benutzung derselben zu schreiben: $\log x = 9{,}6432177 - 10$. Beim Gebrauche siebenstelliger Tafeln hat man zu beachten, daß dieselben zur Bestimmung sehr kleiner Winkeldifferenzen nicht mehr ausreichen.

§. 7. Lehrsätze.

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = + 2 \sin\alpha \cos\beta$;

2) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = + 2 \cos\alpha \sin\beta$;

3) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = + 2 \cos\alpha \cos\beta$;

4) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = - 2 \sin\alpha \sin\beta$.

Beweise zu 1—4. Dieselben folgen aus §. 3.

Bezeichnet man in diesen vier Formeln $(\alpha + \beta)$ durch x, $(\alpha - \beta)$ durch y, also α durch $\frac{1}{2}(x + y)$, β durch $\frac{1}{2}(x - y)$, so nehmen sie folgende Gestalt an, in der sie besonders für das Rechnen mit Logarithmen von Wichtigkeit sind:

5) $\sin x + \sin y = + 2 \sin\frac{1}{2}(x + y) \cos\frac{1}{2}(x - y)$;

6) $\sin x - \sin y = + 2 \cos\frac{1}{2}(x + y) \sin\frac{1}{2}(x - y)$;

7) $\cos x + \cos y = + 2 \cos\frac{1}{2}(x + y) \cos\frac{1}{2}(x - y)$;

8) $\cos x - \cos y = - 2 \sin\frac{1}{2}(x + y) \sin\frac{1}{2}(x - y)$.

Anm. zu 8. Die Differenz $\cos x - \cos y$ muß einen negativen Werth haben, weil x den größern der beiden Winkel bezeichnet.

---

*) Arithmetik II. §§. 109—111.

Zweites Capitel.

Von den Sinus und Cosinus beliebiger Winkel und Winkeldifferenzen.

§. 8. Erklärung.

Nach der in §. 1 gegebenen Erklärung haben die Ausdrücke sin x und cos x nur dann eine Bedeutung, wenn x einen spitzen Winkel bezeichnet. Diese Erklärung bedarf aber aus verschiedenen Gründen einer Erweiterung. Schon die in der Einleitung behandelte Aufgabe, Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks aufzufinden, läßt keine allgemeine Lösung zu, wenn rechte und stumpfe Winkel weder Sinus noch Cosinus haben. Außerdem würden aber die bisher aufgestellten Gleichungen nur eine sehr beschränkte Anwendung finden können, und ein Rechnen mit allgemeinen Ausdrücken wäre eigentlich nicht möglich (Vergl. Arithm. II, Cap I).

Man kann jedoch diese Schwierigkeiten beseitigen, wenn man aus §. 3 folgende erweiterte Erklärung ableitet:

Unter den Ausdrücken $\sin(\alpha \mp \beta)$ und $\cos(\alpha \mp \beta)$ sollen von jetzt an nicht mehr die Verhältnisse der Catheten zur Hypotenuse verstanden werden, sondern immer nur die in §. 3 angegebenen Summen oder Differenzen, und zwar soll diese Erklärung auch dann gelten, **wenn α und β nicht spitze Winkel sind, sondern beliebige Winkel oder Winkeldifferenzen bezeichnen.**

In dem angegebenen Sinne ist also stets

$$\sin(\alpha \mp \beta) = \sin\alpha \cos\beta \mp \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha \cos\beta \pm \sin\alpha \sin\beta,$$

und hierbei sind α und β ganz allgemeine Ausdrücke, **so daß von jetzt an auch Sinus und Cosinus von rechten, stumpfen, erhabenen, sogar von negativen Winkeln als Rechnungsformen auftreten können.**

Anm. Die Werthe der Ausdrücke $\sin(\alpha \mp \beta)$ und $\cos(\alpha \mp \beta)$ lassen sich unmittelbar berechnen, wenn man die Werthe der Ausdrücke $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ kennt, sehr leicht also, weun α und β spitze Winkel sind. Indessen ergiebt sich aus der vorangehenden Erklärung keineswegs als nothwendige Folge, daß diese Ausdrücke nur einen einzigen Werth haben. Es ist z. B.

$$\sin 50^0 \cos 60^0 + \cos 50^0 \sin 60^0 = \sin 110^0,$$

ferner auch $\sin 80^0 \cos 30^0 + \cos 80^0 . \sin 30^0 = \sin 110^0,$

ferner auch $\sin 160^0 \cos 50^0 - \cos 160^0 \sin 50^0 = \sin 110^0,$

aber die gleiche Bedeutung dieser Ausdrücke ist nicht von vorn herein unzweifelhaft, um so weniger, als die Werthe der Ausdrücke $\sin 160^0$ und $\cos 160^0$ noch unbekannt sind. Es ist daher noch nachzuweisen, daß die Sinus und Cosinus von beliebigen Winkeln oder Winkeldifferenzen einen ganz bestimmten Werth haben, ferner, daß die im ersten Capitel aufgestellten Lehrsätze gültig bleiben, wenn die vorkommenden Buchstaben beliebige Winkel oder Winkeldifferenzen bedeuten.

§. 9. Lehrsätze.

Bezeichnen α, β und x ganz beliebige Winkel oder Winkeldifferenzen, so ist

$$1)\ \sin^2(\alpha \mp \beta) + \cos^2(\alpha \mp \beta) = 1;$$
$$2)\ \sin(\alpha + \beta) = \sin[(\alpha \mp x) + (\beta \pm x)];$$
$$3)\ \sin(\alpha - \beta) = \sin[(\alpha \mp x) - (\beta \mp x)];$$
$$4)\ \cos(\alpha + \beta) = \cos[(\alpha \mp x) + (\beta \pm x)];$$
$$5)\ \cos(\alpha - \beta) = \cos[(\alpha \mp x) - (\beta \mp x)];$$
$$6)\ \sin(45^0 + x) = \cos(45^0 - x).$$

Beweis zu 1. Es ist

$$\sin^2(\alpha \mp \beta) = [\sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta]^2$$
$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta \mp 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta,$$
$$\cos^2(\alpha \mp \beta) = [\cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta]^2$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \pm 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta.$$

Daher ist $\sin^2(\alpha \mp \beta) + \cos^2(\alpha \mp \beta)$

$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\beta + \cos^2\beta).$$

Sobald also $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1$ ist, ebenso $(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = 1$, so ist auch $\sin^2(\alpha \mp \beta) + \cos^2(\alpha \mp \beta) = 1$.

Ersteres ist nun der Fall, wenn α und β beliebige spitze Winkel sind, wenn also $(\alpha + \beta)$ einen rechten oder stumpfen Winkel bezeichnen kann. Der Satz gilt daher auch für rechte und stumpfe, ferner aus dem nämlichen Grunde auch für gestreckte und erhabene Winkel, überhaupt für jede Winkelsumme, alsdann aber auch für jede Winkeldifferenz.

Beweis zu 2. Entwickelt man den Ausdruck $\sin[(\alpha \mp x) + (\beta \pm x)]$ vollständig nach der in §. 8 gegebenen Erklärung, indem man zugleich alle Multiplicationen ausführt, so erhält man acht Glieder. Von diesen verschwinden vier, wenn man ordnet, und die übrigen lassen sich mit Hülfe des Lehrsatzes 1 vereinigen.

Es ergiebt sich alsdann die Gleichung

$$\sin[(\alpha \mp x) + (\beta \pm x)] = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta).$$

Beweise zu 3—5. Dieselben werden geführt, wie der Beweis zu 2.

Beweis zu 6. Es ist

$$\sin(45^0 + x) = \sin 45^0 \cos x + \cos 45^0 \sin x$$
$$= \cos 45^0 \cos x + \sin 45^0 \sin x = \cos(45^0 - x).$$

§. 10. Zusatz.

Aus vorigem §. ergiebt sich, daß die Ausdrücke sin v und cos v, in welchen v eine beliebige Winkelsumme oder Winkeldifferenz bezeichnet, immer die nämlichen Werthe haben, in welcher Art man auch v als Summe oder Differenz darstellen möge. Ferner ergiebt sich, daß die Lehrsätze der §§. 1, 2 und 3 richtig bleiben, wenn die in ihnen vorkommenden Buchstaben beliebige Winkel oder Winkeldifferenzen bezeichnen. Da nun alle späteren Sätze aus diesen abgeleitet werden, so folgt, daß die Lehrsätze des ersten Capitels eine allgemeine Gültigkeit haben.

§. 11. Lehrsätze.

1) $\sin 0 = 0$;	2) $\cos 0 = +1$;
3) $\sin R = +1$;	4) $\cos R = 0$;
5) $\sin 2R = 0$;	6) $\cos 2R = -1$;
7) $\sin 3R = -1$;	8) $\cos 3R = 0$;
9) $\sin 4R = 0$;	10) $\cos 4R = +1$.

Beweis zu 1. Es ist $\sin 0 = \sin(x - x) =$

$$\sin x \cos x - \cos x \sin x = 0.$$

Beweis zu 2. Es ist $\cos 0 = \cos(x - x) =$

$$\cos x \cos x + \sin x \sin x = +1.$$

Beweis zu 3. Setzt man $R = \alpha + \beta$, so ist

$\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$, daher

$$\sin R = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\cos\alpha = +1.$$

Beweis zu 4. Setzt man wiederum $R = \alpha + \beta$, so ist

$$\cos R = \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$= \cos\alpha \sin\alpha - \sin\alpha \cos\alpha = 0.$$

Beweis zu 5. Es ist $\sin 2R = \sin(R + R) =$
$$\sin R \cos R + \cos R \sin R = 0.$$

Beweis zu 6. Es ist $\cos 2R = \cos(R + R) =$
$$\cos R \cos R - \sin R \sin R = -1.$$

Beweise zu 7—10. Dieselben werden in ähnlicher Art geführt.

§. 12. Lehrsätze.

Bezeichnet x einen spitzen Winkel, so ist

1) $\sin(2R - x) = + \sin x$; 2) $\cos(2R - x) = - \cos x$;
3) $\sin(2R + x) = - \sin x$; 4) $\cos(2R + x) = - \cos x$;
5) $\sin(4R - x) = - \sin x$; 6) $\cos(4R - x) = + \cos x$.

Beweis zu 1. Es ist $\sin(2R - x) =$
$$\sin 2R \cos x - \cos 2R \sin x = + \sin x.$$

Beweise zu 2—6. Dieselben werden in ähnlicher Art mit Hülfe der in vorigem §. aufgestellten Sätze bewiesen.

Anm. Diese Sätze sind auch dann richtig, wenn x keinen *spitzen* Winkel bezeichnet (§. 10).

§. 13. Lehrsätze.

Bezeichnet x einen beliebigen Winkel, oder eine beliebige Winkeldifferenz, so ist

1) $\sin(4R + x) = \sin x$; 2) $\cos(4R + x) = \cos x$.

Beweise zu 1 und 2. Sie werden geführt, wie die Beweise in §. 12.

§. 14. Lehrsätze.

Bezeichnet $(-x)$ eine Winkeldifferenz, so ist

1) $\sin(-x) = - \sin x$; 2) $\cos(-x) = + \cos x$.

Beweis zu 1. Es ist $\sin(-x) = \sin(0-x) =$

$$\sin 0 \cos x - \cos 0 \sin x = - \sin x.$$

Beweis zu 2. Es ist $\cos(-x) = \cos(0-x) =$

$$\cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = + \cos x.$$

Anm. Es geht schon aus den Gleichungen des §. 3 hervor, daß $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha)$, $\sin(\alpha-\beta) = -\sin(\beta-\alpha)$ ist.

§. 15. Zusatz.

Aus den vorigen §§. ergiebt sich Folgendes:

1) Die Werthe der Sinus und Cosinus wiederholen sich, jedoch mit wechselnden Vorzeichen, in den vier ersten Quadranten, d. h. in den Zwischenräumen von 0 bis R, R bis 2R, 2R bis 3R, 3R bis 4R. Die Sinus sind im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ; die Cosinus sind im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ (§, 12).

2) Die Werthe der Sinus und Cosinus nehmen in den einzelnen Quadranten stetig zu, oder ab, und zwar liegen sie dabei immer zwischen den in §. 11 angegebenen Gränzen (§. 1. Anm. und §. 12).

3) Die Werthe, welche die Sinus und Cosinus in den vier ersten Quadranten haben, wiederholen sich in je vier der folgenden (§. 13).

4) Die Ausdrücke $\sin(-x)$ und $\cos(-x)$ haben nur die Bedeutung von Rechnungsformen, da ein Winkel nie negativ sein kann, und zwar ist $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ (§. 14).

§. 16. Zusatz.

Die Berechnung und Vergleichung der Sinus und Cosinus beliebiger Winkel und Winkeldifferenzen läßt sich am leichtesten ausführen, wenn man jedesmal die in §. 11 angegebenen Gränzwerthe zu benutzen sucht, aber auch dann kann man in sehr verschiedener Art verfahren.

Es ist z. B.

$$\sin 160^0 = \sin(R+70^0) = \cos 70^0,$$

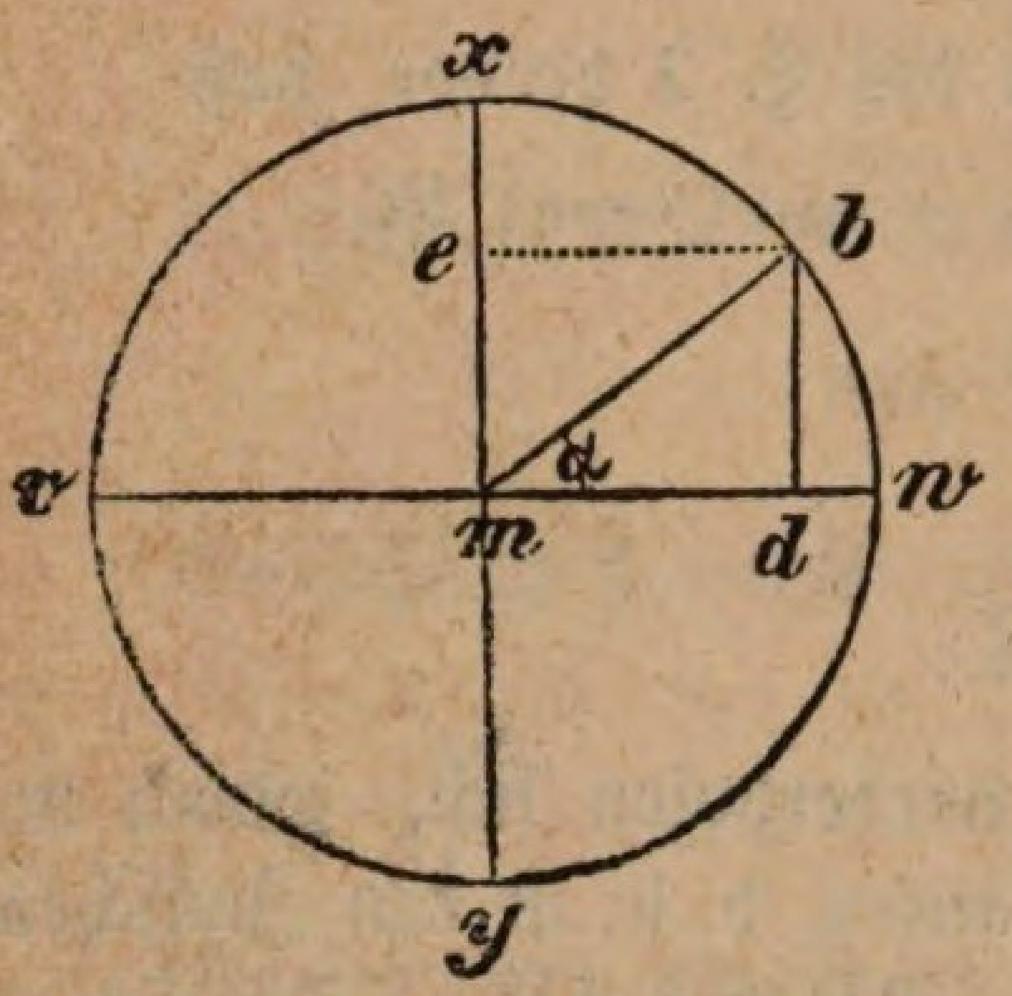
ferner $\sin 160^0 = \sin(2R-20^0) = \sin 20^0,$

ferner $\sin 160^0 = \cos(R-160^0) = \cos(-70^0)$, u. s. w.

§. 17. Zusatz.

Die in diesem Kapitel entwickelten Sätze lassen sich auch durch eine Figur veranschaulichen, so daß die Sinus und Cosinus beliebiger Winkel und Winkeldifferenzen eine geometrische Bedeutung erhalten.

Fig. 8.



Es seien xmy und vmw zwei senkrecht auf einander stehende Durchmesser, und mb sei ein beweglich gedachter Radius, der Art, daß b zunächst auf w liege und dann zu öfteren Malen in der Richtung wbx die Peripherie durchlaufe. Alsdann giebt der Winkel α, den bm mit wm bildet, an, wie weit b in der Bewegung vorgeschritten ist, und kann also, wenn die Drehung eine unaufhörliche ist, jede beliebige Größe erreichen. Ist z. B. $\alpha = 370^0$, so hat bm schon einmal die Peripherie durchlaufen und bildet bei der zweiten Umdrehung den Winkel 10^0 mit der Linie mw. Hat nun b die in der Figur angegebene Lage, so ist $\sin \alpha = (bd : bm)$ und $\cos \alpha = (dm : bm) = (be : bm)$. Setzt man ferner den Radius gleich 1, so ist $\sin \alpha = bd$, $\cos \alpha = be$, d. h. es sind $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ gleich den Maßzahlen der Linien bd und be, wenn die Maßzahl des Radius gleich 1 ist. Es bezeichnet alsdann $\sin \alpha$ die Entfernung des Punktes b von vmw, $\cos \alpha$ die Entfernung desselben von xmy. Denkt man sich nun bm in stetiger Bewegung, so erhält man folgende Resultate:

Ist $\alpha = 0$, so liegt b auf w, und es ist $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Mit wachsendem α wachsen die Sinus, während die Cosinus abnehmen, bis endlich, sobald b auf x liegt, $\sin R = xm = 1$, $\cos R = 0$ wird. Nennt man nun xmw den ersten, xmv den zweiten, vmy den dritten, ymw den vierten Quadranten, so ergiebt sich aus der Figur, daß die absoluten Werthe, welche die Sinus und Cosinus im ersten Quadranten haben, in den übrigen Quadranten sich wiederholen müssen, daß aber in Bezug auf die Lage ein Unterschied stattfindet. Es liegen nämlich die Sinus im ersten und zweiten Quadranten oberhalb vmw, im dritten und vierten unterhalb davon; die Cosinus liegen im ersten und vierten Quadranten rechts von xmy, im zweiten und dritten links davon. Bezeichnet man nun die entgegengesetzte Lage durch entgegengesetztes Vorzeichen, so sind die Sinus positiv im ersten und zweiten Quadranten, die Cosinus im ersten und vierten.

Bei einer zweiten und fernern Umdrehung von bm, wo also α größer wird als 4R, müssen sich die für die vier ersten Quadranten gefundenen Werthe in derselben Reihenfolge wiederholen.

Versteht man ferner unter dem Winkel $(-\alpha)$ denjenigen, der durch Drehung von bm nicht in der vorher angenommenen Richtung wbx, sondern in der entgegengesetzten Richtung wy entsteht, so liegen $\sin\alpha$ und $\sin(-\alpha)$ auf entgegengesetzten Seiten von vmw, haben also entgegengesetztes Vorzeichen, während $\cos\alpha$ und $\cos(-\alpha)$ auf derselben Seite von xmy liegen, daher auch dasselbe Vorzeichen haben.

§. 18. Lehrsätze.

Ist $x+y+z=2R$, so gelten folgende Sätze:

$$1)\ \begin{cases} \sin x = \sin(y+z); \\ \sin y = \sin(x+z); \\ \sin z = \sin(x+y); \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \cos x = -\cos(y+z); \\ \cos y = -\cos(x+z); \\ \cos z = -\cos(x+y); \end{cases}$$

$$3)\quad \sin x + \sin y + \sin z = 4\cos\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}z;$$

$$4)\quad \cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}y\sin\tfrac{1}{2}z.$$

Beweise zu 1 und 2. Sie folgen aus §. 12, 1 und 2.

Beweis zu 3. Es ist $\sin z = \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$, daher $\sin x + \sin y + \sin z = \sin x(1+\cos y) + \sin y(1+\cos x)$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, 2\cos^2\tfrac{1}{2}y + 2\sin\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}y \,.\, 2\cos^2\tfrac{1}{2}x$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}y(\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}y + \cos\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}y)$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}y\sin\tfrac{1}{2}(x+y) = 4\cos\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}z.$$

Bew. zu 4. Es ist $\cos z = -\cos(x+y) = -\cos x\cos y + \sin x\sin y$, daher $\cos x + \cos y + \cos z = \cos x(1-\cos y) + \cos y + \sin x\sin y$

$$= [1-2\sin^2\tfrac{1}{2}x] \,.\, 2\sin^2\tfrac{1}{2}y + [1-2\sin^2\tfrac{1}{2}y] + 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x \,.\, 2\sin\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}y$$
$$= 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}y[\cos\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}y - \sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}y]$$
$$= 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}(x+y) = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}y\sin\tfrac{1}{2}z.$$

Drittes Capitel.

Von den Tangenten, Cotangenten, Secanten und Cosecanten.

§. 19. Erklärung.

Man bezeichnet

1) den Quotienten $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ kürzer durch $\operatorname{tg}\alpha$ (Tangente von α);

2) „ „ $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ „ „ $\operatorname{ctg}\alpha$ (Cotangente von α);

3) „ „ $\frac{1}{\cos\alpha}$ „ „ $\sec\alpha$ (Secante von α);

4) „ „ $\frac{1}{\sin\alpha}$ „ „ $\operatorname{cosec}\alpha$ (Cosecante von α).

Da in den Ausdrücken $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ unter α eine Differenz beliebiger Winkel verstanden werden kann, so gilt dasselbe auch für die Ausdrücke $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ u. s. w.

§. 20. Zusatz.

Für die Werthe, welche die Ausdrücke (Funktionen) $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ bei beliebiger Größe von α annehmen können, erhält man aus vorigem Capitel folgende allgemeine Bestimmungen:

1) Die Tangenten und Cotangenten sind im ersten und dritten Quadranten, wo die Sinus und Cosinus gleiche Vorzeichen haben, positiv, in den übrigen negativ. Die Secanten sind wie die Cosinus im ersten und vierten, die Cosecanten wie die Sinus im ersten und zweiten Quadranten positiv, in den übrigen negativ.

2) Die Werthe, welche die erwähnten vier Funktionen im ersten Quadranten erhalten, wiederholen sich mit wechselnden Vorzeichen in den folgenden drei Quadranten; ferner wiederholen sich die Werthe, welche sie in den vier ersten Quadranten erhalten, in je vier der folgenden.

3) Ist α negativ, so erhält man die Gleichungen

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(-\alpha) = +\sec\alpha; \quad \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

§. 21. Zusatz.

Für die Gränzwerthe, welche die vier Funktionen in den vier ersten Quadranten annehmen können, erhält man aus §. 11 folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lrlllll}
\text{Ist} & x = & 0, & R, & 2R, & 3R, & 4R, \\
\text{so ist} & \operatorname{tg} x = & 0, & \frac{1}{0}, & 0, & \frac{1}{0}, & 0, \\
 & \operatorname{ctg} x = & \frac{1}{0}, & 0, & \frac{1}{0}, & 0, & \frac{1}{0}, \\
 & \sec x = & +1, & \frac{1}{0}, & -1, & \frac{1}{0}, & +1, \\
 & \operatorname{cosec} x = & \frac{1}{0}, & +1, & \frac{1}{0}, & -1, & \frac{1}{0}.
\end{array}$$

Zwischen diesen Gränzwerthen nehmen die betreffenden Funktionen, wie die Sinus und Cosinus, stetig ab und zu. Die Zunahme der (absoluten) Werthe erstreckt sich bis zum unendlich Großen (∞), weil die Nenner ($\sin x$ und $\cos x$) einen unendlich kleinen Werth annehmen können. Die (absoluten) Werthe der Tangenten und Cotangenten wachsen daher von 0 bis ∞, die der Secanten und Cosecanten von 1 bis ∞.*)

Der Gränzwerth (1 : 0) giebt an, daß für diesen Fall die betreffende Funktion durch eine Zahl nicht mehr darstellbar ist, auch nicht durch das Zeichen ∞, obgleich sich die Werthe zu beiden Seiten dieses Gränzwerthes dem unendlich Großen mehr und mehr nähern.

§. 22. Lehrsätze.

1) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (R - \alpha)$;

2) $\sec \alpha = \operatorname{cosec} (R - \alpha)$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = 1 : \operatorname{ctg} \alpha$;

4) $\begin{cases} \sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha; \\ \sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha; \\ \operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \end{cases}$

Beweise zu 1—3. Sie ergeben sich aus §. 19 und §. 10, Anm.

---

*) Die Secanten und Cosecanten haben den unveränderlichen Zähler 1 und einen veränderlichen Nenner, der nie größer als 1 sein kann.

Beweis zu 4. Es ist $\sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$.

Beweis zu 5. Er wird ebenso geführt, wie der Beweis zu 4.

§. 23. Zusatz.

Aus jeder der sechs trigonometrischen Funktionen ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$) lassen sich die übrigen fünf berechnen.

1) Ist $\sin\alpha$ gegeben, so ist $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. Aus $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ erhält man aber die übrigen Funktionen unmittelbar.

2) Ist $\cos\alpha$ gegeben, so ist $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$; das Uebrige wie bei 1.

3) Ist $\operatorname{tg}\alpha$ gegeben, so ist $\sec\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ (nach §. 22, 4).

Ferner ist $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

4) Ist $\operatorname{ctg}\alpha$ gegeben, so ist $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$ (nach §. 22).

Ferner ist $\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}$; $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}$; $\sec\alpha = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

5) Ist $\sec\alpha$ gegeben, so ist $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}$.

6) Ist $\operatorname{cosec}\alpha$ gegeben, so ist $\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$; $\sec\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}}$.

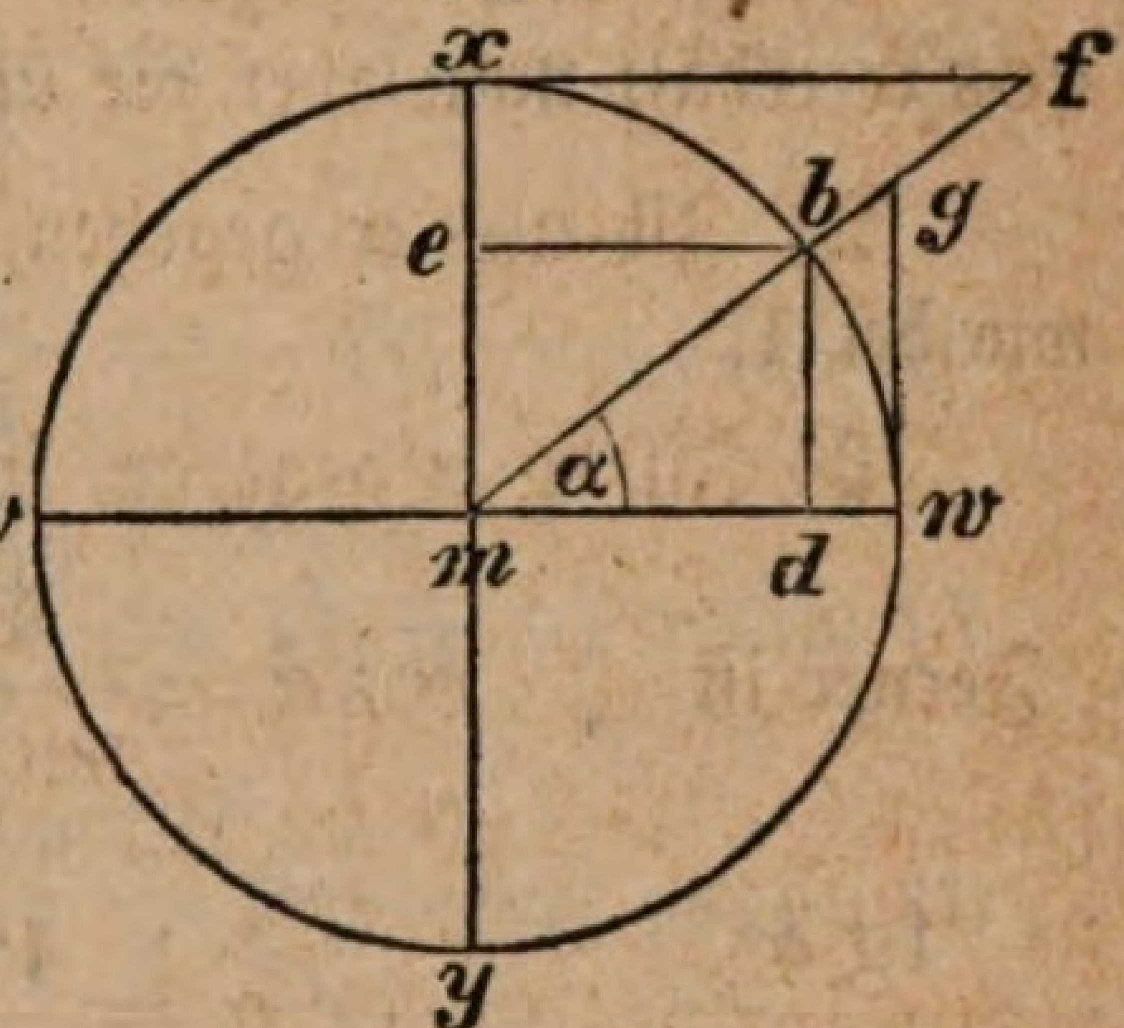
Anm. Die in den Resultaten vorkommenden Wurzeln sind mit beiden Vorzeichen zu verbinden, weil der Winkel α zweien Quadranten angehören kann. Ist nämlich z. B. $\sin\alpha = +m$ gegeben, so liegt α im ersten, oder im zweiten Quadranten. Wenn nun aus dem für $\cos\alpha$ berechneten Werthe ebenfalls hervorgehen soll, daß α in jedem der beiden ersten Quadranten lie-

gen könne, so muß $\cos\alpha = \mp\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ sein. Eine derartige Uebereinstimmung in Bezug auf die Quadranten tritt aber für jeden einzelnen Fall ein, sobald die Wurzeln das doppelte Vorzeichen erhalten.

§. 24. Zusatz.

Die Beziehungen zwischen den sechs trigonometrischen Funktionen lassen sich auch geometrisch veranschaulichen.

Fig. 9.



Es gelte in Fig. 9 für die Linien xmy, vmw, bd, dm und bm das in §. 17 Gesagte. Errichtet man nun in w, dem Endpunkte des einen Schenkels von α, auf mw eine Senkrechte und verlängert dieselbe, bis sie in g von der Verlängerung des andern Schenkels mb geschnitten wird, so ist gw die Tangente, gm die Secante von α (in geometrischem Sinne). Ebenso ist fx die Tangente, fm die Secante des Winkels $(R - \alpha)$, oder jenes die Cotangente, dieses die Cosecante von α.

Die Maßzahlen dieser Linien entsprechen, wenn der Radius gleich 1 ist, den in §. 19 gegebenen Erklärungen. Es ist nämlich

1) $gw : mw = bd : md$, oder $gw : 1 = \sin\alpha : \cos\alpha$, oder $gw = tg\,\alpha$;

2) $gm : wm = bm : dm$, „ $gm : 1 = 1 : \cos\alpha$, „ $gm = \sec\alpha$.

Ebenso ist $fx = tg\,(R - \alpha)$, $fm = \sec\,(R - \alpha)$, oder

$$fx = ctg\,\alpha, \quad fm = cosec\,\alpha.$$

Bewegt sich nun bm stetig durch die aufeinander folgenden Quadranten, und bezeichnet man die entgegengesetzte Lage durch das entgegengesetzte Vorzeichen, so erhält man die in §§. 20 und 21 abgeleiteten Resultate.

Anm. Nennt man gw die geometrische, $tg\,\alpha$ die trigonometrische Tangente von α, ist ferner t die Maßzahl der geometrischen Tangente, r die Maßzahl des Radius, so ist

$$t = r \,.\, tg\,\alpha, \quad tg\,\alpha = (t : r).$$

Ist aber $r = 1$, so ist $t = tg\,\alpha$.

§. 25. Lehrsätze.

$$1)\ tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta} = \frac{ctg\,\alpha + ctg\,\beta}{ctg\,\alpha \,.\, ctg\,\beta - 1};$$

2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta + 1}$;

3) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$;

4) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$;

5) $\sec(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha\,.\,\sec\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta - 1}$;

6) $\sec(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha\,.\,\sec\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta + 1}$;

7) $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{\sec\alpha\,.\,\sec\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$;

8) $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\sec\alpha\,.\,\sec\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

Bew. zu 1. Es ist $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$.

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\,.\,\cos\beta$, so erhält man

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}.$$

Dividirt man hingegen Zähler und Nenner durch $\sin\alpha\,.\,\sin\beta$, so erhält man $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta - 1}$.

Beweis zu 2. Er wird ebenso geführt.

Beweise zu 3 und 4. Sie folgen daraus, daß

$$\operatorname{ctg}(\alpha \mp \beta) = 1 : \operatorname{tg}(\alpha \mp \beta) \text{ ist.}$$

Beweis zu 5. Es ist $\sec(\alpha+\beta) = \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$.

Je nachdem man Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\,.\,\cos\beta$, oder durch $\sin\alpha\,.\,\sin\beta$ dividirt, erhält man als Resultat entweder

$$\frac{\sec\alpha\,.\,\sec\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}, \text{ oder } \frac{\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\,.\,\operatorname{ctg}\beta - 1}.$$

Beweis zu 6. Er wird ebenso geführt.

Beweis zu 7. Es ist $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$.

Je nachdem man Zähler und Nenner durch $\sin\alpha \,.\, \sin\beta$, oder durch $\cos\alpha \,.\, \cos\beta$ dividirt, erhält man als Resultat entweder

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}, \text{ oder } \frac{\sec\alpha \,.\, \sec\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Beweis zu 8. Er wird ebenso geführt.

§. 26. Lehrsätze.

1) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$;

2) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$;

3) $\sec 2\alpha = \frac{\sec^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$;

4) $\operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\sec^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

Beweise. Sie folgen unmittelbar aus den Formeln des vorigen §., wenn man in denselben $\beta=\alpha$ setzt.

§. 27. Lehrsätze.

1) $\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha \mp \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\mp\alpha)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \,.\, \cos\beta}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \,.\, \cos\beta}$.

Beweis zu 1. Es ist $\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \mp \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}.$$

Beweise zu 2, 3 und 4. Sie werden in derselben Art geführt.

§. 28. Lehrsätze.

1) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

2) $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

3) $\frac{\sin\alpha \mp \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha\mp\beta)$;

4) $\frac{\sin\alpha \mp \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta)$.

Beweis zu 1. Es ist $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ {}^{*)}}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,.\,\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

$$= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,.\,\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Beweise zu 2, 3, 4. Sie werden in derselben Art geführt.

§. 29. Lehrsätze.

1) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \operatorname{ctg}(45^0 \pm \alpha)$;

2) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{\cos\alpha \mp \sin\alpha}{\cos\alpha \pm \sin\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{1 \mp \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$;

5) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{1 \pm \sin 2\alpha}$.

*) Vergl. §. 7.

Beweis zu 1. Er folgt aus §. 22, 1.

Beweis zu 2. Es ist $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{\sin 45^0 . \cos\alpha \mp \cos 45^0 . \sin\alpha}{\cos 45^0 . \cos\alpha \pm \sin 45^0 . \sin\alpha}$

$= \frac{\cos\alpha \mp \sin\alpha}{\cos\alpha \pm \sin\alpha}$, weil $\sin 45^0 = \cos 45^0$ ist.

Beweis zu 3. Er folgt aus 2, wenn man Zähler und Nenner des Ausdrucks $\frac{\cos\alpha \mp \sin\alpha}{\cos\alpha \pm \sin\alpha}$ durch $\cos\alpha$ dividirt.

Beweis zu 4. Es ist nach 2) $\operatorname{tg}(45^0 \mp \alpha) = \frac{\cos\alpha \mp \sin\alpha}{\cos\alpha \pm \sin\alpha}$

$$= \frac{(\cos\alpha \mp \sin\alpha)(\cos\alpha \mp \sin\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \mp 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1 \mp \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Beweis zu 5. Er wird geführt, wie der Beweis zu 4; nur multiplicirt man Zähler und Nenner nicht mit $(\cos\alpha \mp \sin\alpha)$, sondern mit $(\cos\alpha \pm \sin\alpha)$.

§. 30. Lehrsätze.

Ist $x + y + z = 2R$, so ergeben sich folgende Sätze:

1) $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z = \operatorname{tg}x . \operatorname{tg}y . \operatorname{tg}z$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x + \operatorname{ctg}y\frac{1}{2} + \operatorname{ctg}\frac{1}{2}z = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}x . \operatorname{ctg}\frac{1}{2}y . \operatorname{ctg}\frac{1}{2}z$.

Beweis zu 1. Es ist $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{\sin z}{\cos z}$

$$= \frac{\sin x \cos y \cos z + \sin y \cos x \cos z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$

$$= \frac{(\sin x \cos y + \sin y \cos x)\cos z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$

$$= \frac{\sin(x+y)\cos z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z} = \frac{\sin z \cos z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$

$$= \frac{\sin z(\cos z + \cos x \cos y)}{\cos x \cos y \cos z} = \frac{\sin z[-\cos(x+y) + \cos x \cos y]}{\cos x \cos y \cos z}$$

$$= \frac{\sin z \sin x \sin y}{\cos x \cos y \cos z} = \operatorname{tg}x . \operatorname{tg}y . \operatorname{tg}z.$$

Beweis zu 2. Es ist $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x + \operatorname{ctg}\frac{1}{2}y + \operatorname{ctg}\frac{1}{2}z$
$= \operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}x) + \operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}y) + \operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}z)$.

Da nun $(R-\frac{1}{2}x)+(R-\frac{1}{2}y)+(R-\frac{1}{2}z)=3R-\frac{1}{2}(x+y+z)=2R$ ist, so folgt aus 1), daß
$\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}x)+\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}y)+\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}z)=\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}x).\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}y).\operatorname{tg}(R-\frac{1}{2}z)$, oder daß $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x + \operatorname{ctg}\frac{1}{2}y + \operatorname{ctg}\frac{1}{2}z = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}x.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}y.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}z$ ist.

B. Angewandte Trigonometrie.

Viertes Capitel.

Von den einfachen trigonometrischen Aufgaben.

§. 31. Lehrsatz.

Sind a, b, c die Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ die denselben gegenüberliegenden Winkel, so ist

1) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$;

2) $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$;

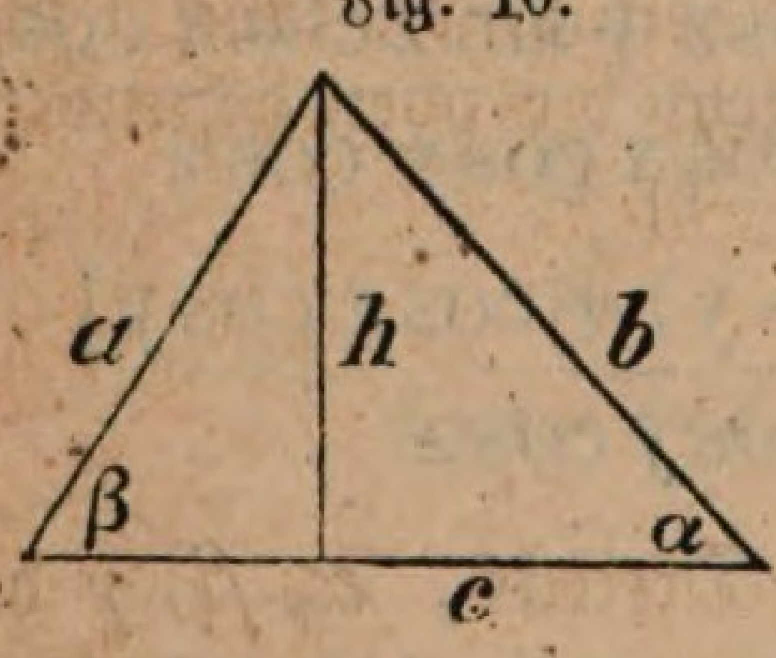
3) $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$.

Beweis zu 1. Einer der beiden Winkel α und β muß spitz sein; es sei dies α. Die zu c gehörende Höhe werde durch h bezeichnet. Dann ist stets

$$a : b = \frac{h}{b} : \frac{h}{a}.$$

Ist $\beta < R$ (Fig. 10), so ist

Fig. 10.



$$\frac{h}{b} = \sin\alpha,$$

$$\frac{h}{a} = \sin\beta,$$

also $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.

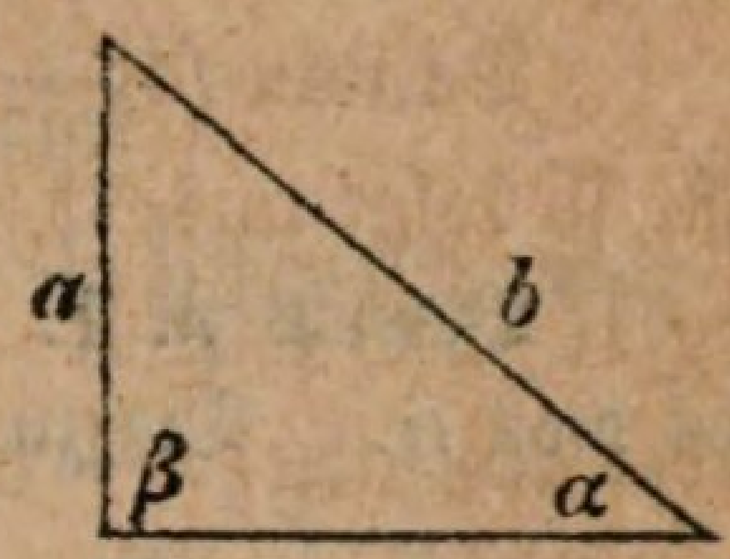
Ist $\beta = R$, daher $h = a$ (Fig. 11), so ist

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{b} = \sin\alpha,$$

$$\frac{h}{a} = \frac{a}{a} = 1 = \sin R = \sin\beta,$$

also $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.

Fig. 11.



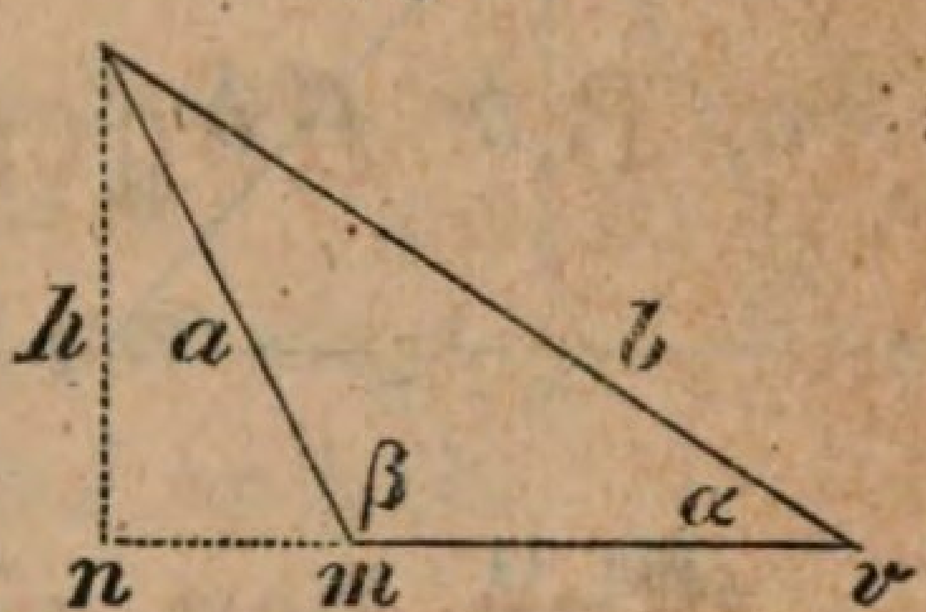
Ist $\beta > R$ (Fig. 12), so ist

$$\frac{h}{b} = \sin\alpha,$$

$$\frac{h}{a} = \sin(2R - \beta) = \sin\beta,$$

also $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.

Fig. 12.



Beweise zu 2 und 3. Sie werden ebenso geführt.

In jedem Dreiecke verhalten sich also je zwei Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Daraus folgen noch die Gleichungen:

$$a \,.\, \sin\beta = b \,.\, \sin\alpha;$$

$$a \,.\, \sin\gamma = c \,.\, \sin\alpha;$$

$$b \,.\, \sin\gamma = c \,.\, \sin\beta.$$

§. 32. Zusatz.

Nach vor. §. ist $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, daher auch

$$(a+b):(a-b) = (\sin\alpha + \sin\beta):(\sin\alpha - \sin\beta), \text{ oder (n.§.28)}$$

$$(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Anm. Aehnliche Gleichungen lassen sich aus 2) und 3) des vorigen §. ableiten. Diese Gleichungen sind für die Rechnung von Wichtigkeit, weil man vermittelst derselben aus zwei Seiten und der Summe ihrer Gegenwinkel die Differenz der letzteren, daher auch die Winkel selbst bestimmen kann. Bezeichnet man $(\alpha+\beta)$ durch s, also β durch $(s-\alpha)$, so geht die oben gefundene Gleichung über in $(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}s : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\alpha - s)$.

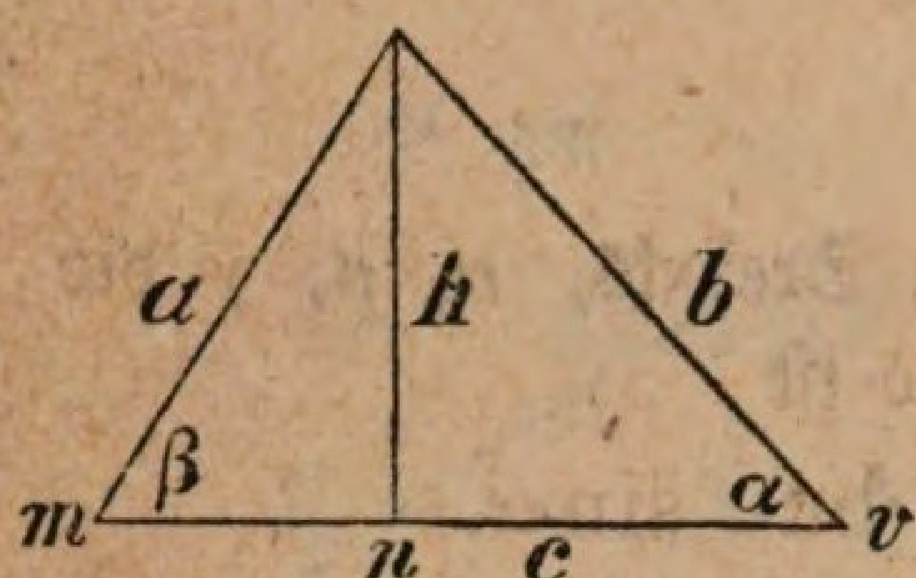
§. 33. Lehrsatz.

Sind a, b, c die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ die denselben gegenüberliegenden Winkel, so ist

$$1)\ a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha = c;$$
$$2)\ a \,.\, \cos\gamma + c \,.\, \cos\alpha = b;$$
$$3)\ b \,.\, \cos\gamma + c \,.\, \cos\beta = a.$$

Beweis zu 1. Einer der beiden Winkel α und β muß spitz sein; es sei dies α. Die zu c gehörende Höhe sei h.

Fig. 13.

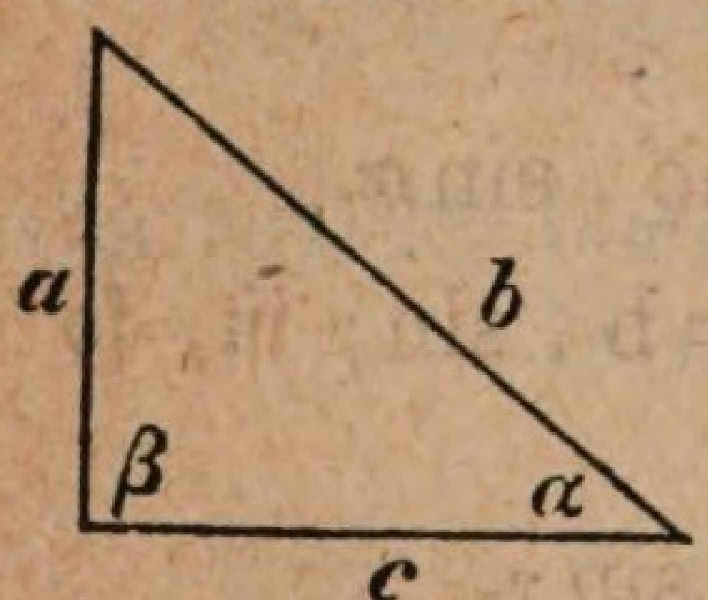


Ist $\beta < R$ (Fig. 13), so ist

$$a \,.\, \cos\beta = mn,$$
$$b \,.\, \cos\alpha = vn,$$

also $a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha = mn + vn = c.$

Fig. 14.



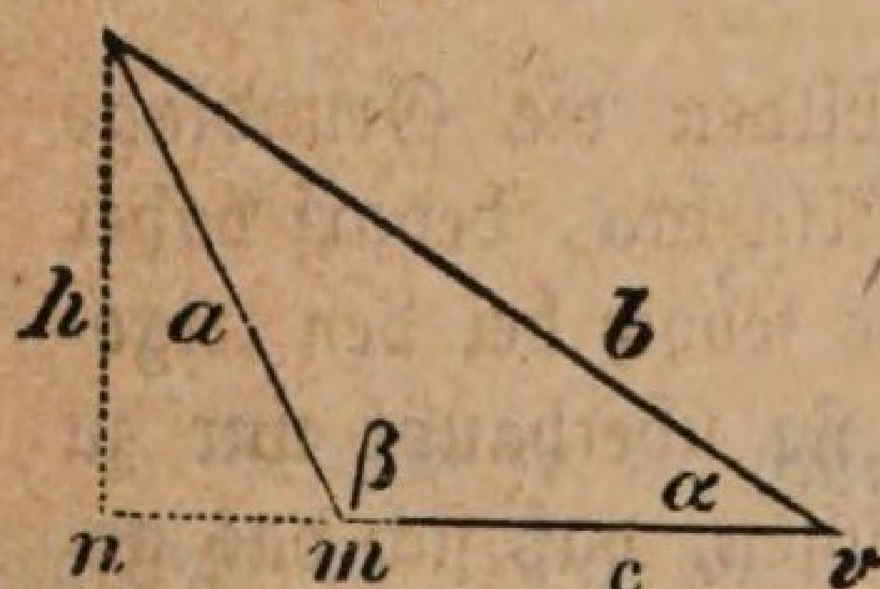
Ist $\beta = R$ (Fig. 14), so ist

$$a \,.\, \cos\beta = 0,$$
$$b \,.\, \cos\alpha = c,$$

also $a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha = c.$

Ist $\beta > R$ (Fig. 15), so ist

Fig. 15.



$$a \,.\, \cos\beta = -a \,.\, \cos(2R - \beta) = -mn,$$
$$b \,.\, \cos\alpha = vn,$$

also $a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha = -mn + vn = c.$

Beweise zu 2 und 3. Sie werden ebenso geführt.

Anm. Die Summe der Projectionen zweier Seiten eines Dreiecks auf die dritte ist gleich der dritten Seite.

§. 34. Lehrsatz.

Sind a, b, c die Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ die denselben gegenüberliegenden Winkel, so ist

$$1)\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha;$$
$$2)\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\beta;$$
$$3)\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos\gamma.$$

Beweis zu 1. Es ist

$$a^2 \sin^2 \beta = b^2 \sin^2 \alpha \text{ (§. 31), ferner}$$

$$a^2 \cos^2 \beta = (c - b \cos \alpha)^2 \text{ (§. 33), daher}$$

$$a^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = b^2\sin^2 a + c^2 - 2bc \cos\alpha + b^2\cos^2\alpha, \text{ oder}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Beweise zu 2 und 3. Sie werden ebenso geführt. (Vergl. Planim. §. 115).

§. 35. Lehrsatz.

Sind a, b, c die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ die denselben gegenüberliegenden Winkel, J der Inhalt, so ist

$$J = \tfrac{1}{2} ab \,.\, \sin\gamma = \tfrac{1}{2} ac \,.\, \sin\beta = \tfrac{1}{2} bc \,.\, \sin\alpha.$$

Beweis. Ist h die zu c gehörende Höhe, so ist $J = \frac{1}{2}$ ch.

Nun ist $h = b \,.\, \sin\alpha$. (§. 31).

Setzt man diesen Werth ein, so erhält man $J = \frac{1}{2} bc \,.\, \sin\alpha$.

Da ferner $b \,.\, \sin\alpha = a \,.\, \sin\beta$, und $c \,.\, \sin\beta = b \,.\, \sin\gamma$ ist, so erhält man durch Einsetzen dieser Werthe:

$$J = \tfrac{1}{2} bc \,.\, \sin\alpha = \tfrac{1}{2} ac \,.\, \sin\beta = \tfrac{1}{2} ab \,.\, \sin\gamma.$$

§. 36. Zusatz.

Die in §§. 31—35 aufgestellten Gleichungen bilden die Grundlage für jede Dreiecksberechnung. Alles Uebrige ist bloße Algebra, bedarf daher im Allgemeinen keiner nochmaligen Erklärung. Da es jedoch bei den trigonometrischen Aufgaben nicht blos darauf ankommt, sie überhaupt nur zu lösen, da sie vielmehr wo möglich so gelöst werden müssen, daß sich das gefundene Resultat auch logarithmisch bequem berechnen läßt, so sind zuweilen Umformungen nöthig, wie man sie bei den gewöhnlichen algebraischen Gleichungen nicht anwendet. In den nachfolgenden Aufgaben sollen deshalb einige häufig vorkommende Reductionen erläutert werden.

Aufgabe I. Die Gleichung $a \sin x + b \cos x = c$ nach x zu lösen.

Auflösung. Setzt man $(b : a) = \operatorname{tg} v$, $(c : a) = c'$, so ist

$$\sin x + \operatorname{tg} v \cos x = c', \text{ oder}$$

$$\cos v \sin x + \sin v \cos x = c' \cos v, \text{ oder}$$

$$\sin(v + x) = c' \cos v.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich x logarithmisch berechnen.

Aufgabe II. Den Ausdruck $(a-b):(a+b)$ zu berechnen, wenn a und b zusammengesetzte Ausdrücke sind, deren Logarithmen man kennt.

Auflösung. Setzt man $b : a = \text{tg}\,v$, so ist

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\text{tg}\,v}{1+\text{tg}\,v} = \text{ctg}(45+v) \quad (§.29,3).$$

Da nun $\log \text{tg}\,v = \log b - \log a$ bekannt ist, so läßt sich der gefundene Ausdruck logarithmisch berechnen.

Aufgabe III. Die Gleichung $\sin(\alpha - x) = m \sin x$ nach x zu lösen.

Auflösung. Es ist $\sin(\alpha - x) : \sin x = m : 1$, daher

$$[\sin x - \sin(\alpha - x)] : [\sin x + \sin(\alpha - x)] = (1-m) : (1+m),$$

oder $\text{tg}\,\frac{1}{2}(2x-\alpha) : \text{tg}\,\frac{1}{2}\alpha = (1-m) : (1+m)$.*)

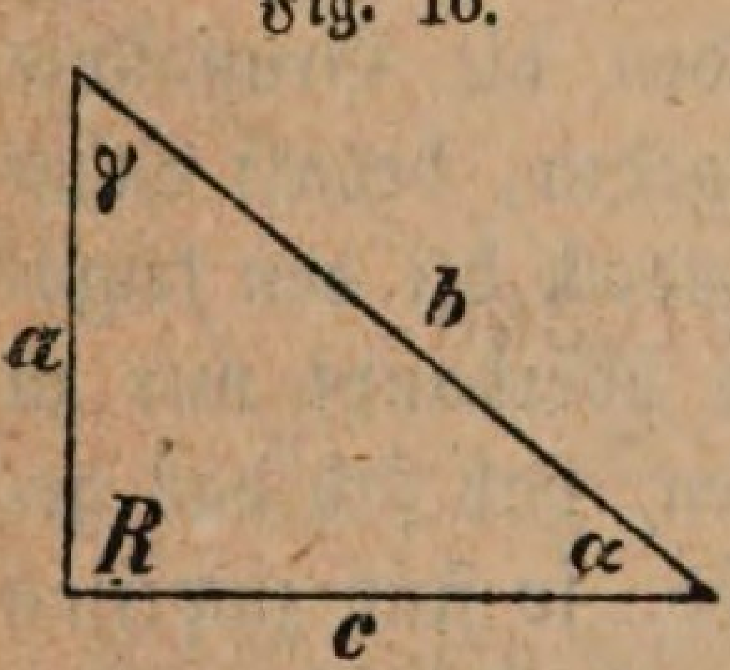
Setzt man nun $m = \text{tg}\,v$, so ist (nach II)

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(2x-\alpha) = \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \text{ctg}\,(45+v).$$

§. 37. Aufgabe.

Aus drei gegebenen Stücken (Seiten oder Winkeln) eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen drei und außerdem den Inhalt zu bestimmen.

Fig. 16.



Auflösung. Man erhält folgende Gleichungen:

1) $\sin\alpha = \cos\gamma = a : b$;

2) $\cos\alpha = \sin\gamma = c : b$;

3) $\text{tg}\,\alpha = \text{ctg}\,\gamma = a : c$;

4) $b^2 = a^2 + c^2$;

5) $J = \frac{1}{2}ac$.

Aus diesen Gleichungen lassen sich, wenn zwei**) der in ihnen vorkommenden Größen gegeben sind (darunter wenigstens eine Seite), die übrigen leicht berechnen.

Sind b und α gegeben, so ist

$$\gamma = R - \alpha;\ a = b\sin\alpha;\ c = b\cos\alpha;\ J = \tfrac{1}{2}b^2.\sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{4}b^2.\sin 2\alpha$$

*) Vergl. §. 32.

**) Die dritte der bekannten Größen ist der rechte Winkel.

Sind c und α gegeben, so ist

$\gamma = R - \alpha$; $b = c \sec\alpha$ (nach 2); $a = c \operatorname{tg}\alpha$ (nach 3); $J = \frac{1}{2}c^2 \operatorname{tg}\alpha$.

Sind b und c gegeben, so ist

$\cos\alpha = \sin\gamma = c : b$; $a = \sqrt{b^2 - c^2}$; $J = \frac{1}{2}c\sqrt{b^2 - c^2}$.

Sind a und c gegeben, so ist

$b = \sqrt{c^2 + a^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma = a : c$ (nach 3); $J = \frac{1}{2}ac$.

Beispiel. Es sei $c = 32,69$ und $\alpha = 42^0\,44'\,15''$. Alsdann ist

1) $a = c \,.\, \operatorname{tg}\alpha,$

$\log a = \log 32,69 + \log\operatorname{tg} 42^0\,44'\,15''$

$= 1,5144149 + 9,9656653 - 10$

$= 1,4800802,$

$a = 30,2051;$

2) $b = c \,.\, \sec\alpha = c : \cos\alpha,$

$\log b = 1,5144149 - (9,8659844 - 10)$

$= 1,6484305,$

$b = 44,5072;$

3) $J = \frac{1}{2}c^2 \,.\, \operatorname{tg}\alpha,$

$\log J = 2 \log c + \log\operatorname{tg}\alpha - \log 2$

$= 3,0288298 + 9,9656653 - 0,3010300$

$= 2,6934651,$

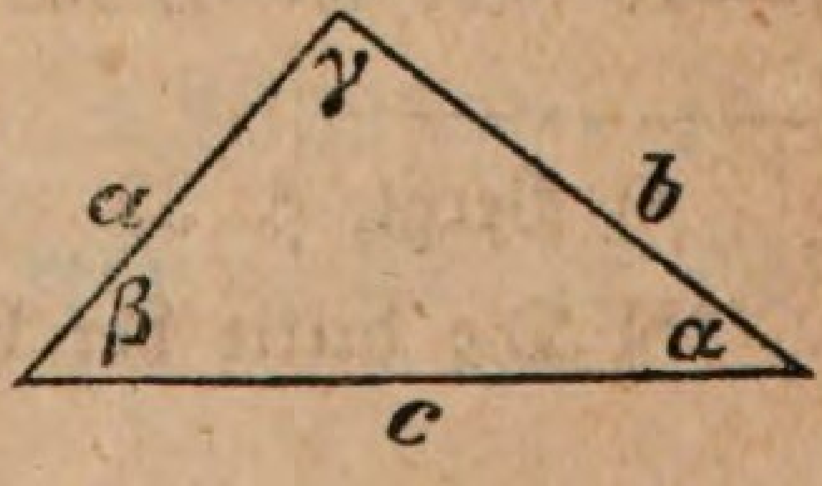
$J = 493,702.$

§. 38. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind zwei Winkel α und β und die Seite c bekannt. Die übrigen Stücke zu bestimmen.

Auflösung. Zunächst ist $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$; $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$. Ferner ist

Fig. 17.



1) $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, daher $a = c \,.\, \sin\alpha : \sin\gamma$;

2) $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$, „ $b = c \,.\, \sin\beta : \sin\gamma$;

3) $J = \frac{1}{2}\, ac \,.\, \sin\beta = \frac{1}{2}c^2 \,.\, \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}$.

Beispiel. Es sei $\alpha = 34^0\,24'\,58''$; $\beta = 42^0\,32'$; $c = 63,\ 14$. Alsdann ist

1) $\gamma = 2R - (\alpha + \beta) = 103^0\ 3'\ 2''$;

2) $\log a = \log 63,\,14 + \log \sin 34^0 24' 58'' - \log \sin 103^0 3' 2''$

$= 1,8003046 + 9,7522014 - 10 - 9,9886354 + 10$

$= 1,5638706,$

$a = 36,6328;$

3) $\log b = 1,8003046 + 9,8299589 - 10 - 9,9886354 + 10$

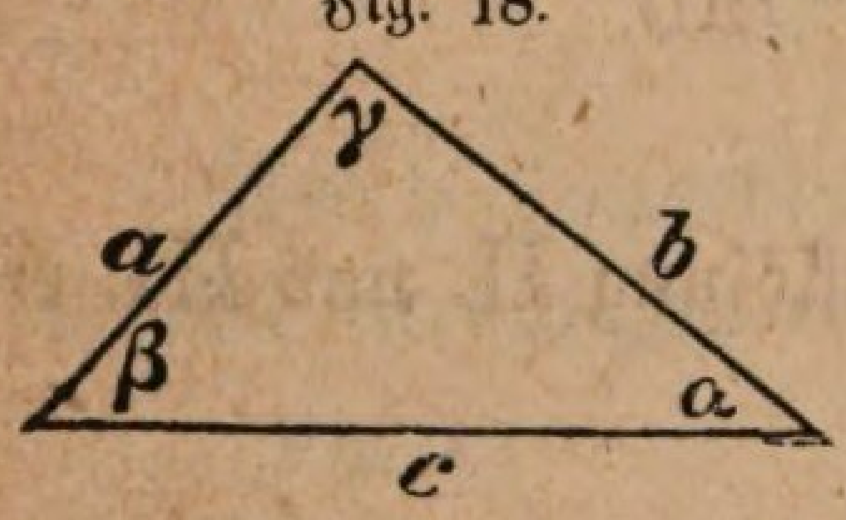
$= 1,6416281,$

$b = 43,8155.$

§. 39. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind die drei Seiten a, b, c bekannt. Die drei Winkel α, β, γ zu bestimmen.

Fig. 18.



Auflösung I. Es ist $J = \frac{1}{2} ab . \sin\gamma$ (§. 35), aber auch $J = \frac{1}{4}\sqrt{SABC}$ (Planim. §. 117),

daher $\sin\gamma = \frac{1}{2ab}\sqrt{SABC}$.

Auf dieselbe Art findet man die Gleichungen:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2bc}\sqrt{SABC};\ \sin\beta = \frac{1}{2ac}\sqrt{SABC}.$$

Auflös. II. Es ist $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \cos\beta$

$$= a^2 + c^2 - 2ac\left(2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1\right)$$

$$= a^2 + c^2 + 2ac - 4ac . \cos^2\frac{\beta}{2},$$

daher $4ac . \cos^2\frac{\beta}{2} = (a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b) = SB$,

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{SB}{ac}}.$$

Auf dieselbe Art findet man die Gleichungen:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{SA}{bc}};\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{SC}{ab}}.$$

Auflös. III. Es ist $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos\beta$

$$=a^2+c^2-2ac\left(1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=(\alpha-c)^2+4ac.\sin^2\frac{\beta}{2},$$

daher $4ac.\sin^2\frac{\beta}{2}=b^2-(a-c)^2=(b+a-c).(b+c-a)=CA,$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{AC}{ac}}.$$

Auf dieselbe Art findet man die Gleichungen:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{BC}{bc}};\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{AB}{ab}}.$$

Auflösung IV. Durch Verbindung der in Auflösung II. und III. erhaltenen Resultate entstehen die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{BC}{SA}};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{AC}{SB}};\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{AB}{SC}}.$$

Beispiel zu Auflös. IV. Es sei $a=53{,}2$; $b=44{,}8$; $c=20{,}6$; folglich

$S=118{,}6$; $A=12{,}2$; $B=29$; $C=77{,}4$;

$\log S=2{,}0740847$; $\log A=1{,}0863598$; $\log B=1{,}4623980$;

$\log C=1{,}8887410.$

Alsdann ist

$\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha=\tfrac{1}{2}(\log B+\log C-\log S-\log A)=10{,}0953482-10,$

$\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta=\tfrac{1}{2}(\log A+\log C-\log S-\log B)=9{,}7193090-10,$

$\log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma=\tfrac{1}{2}(\log A+\log B-\log S-\log C)=9{,}2929660-10,$

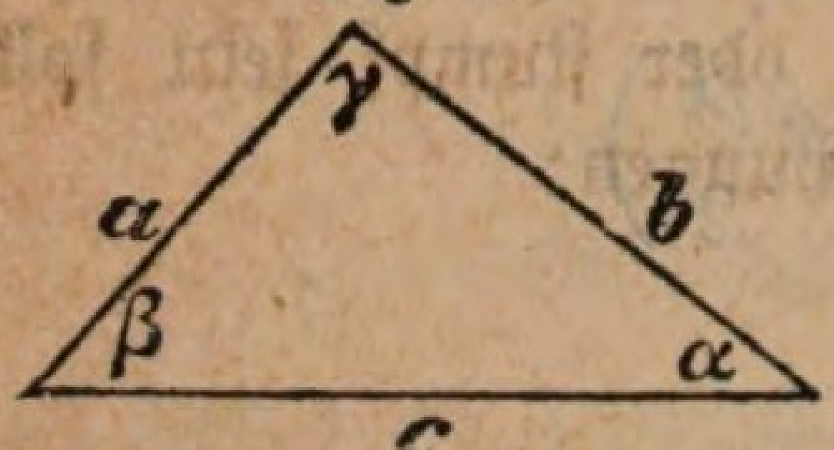
daher $\alpha=102^0\,28'\,44{,}8''$; $\beta=55^0\,18'\,23{,}9''$; $\gamma=22^0\,12'\,51''$.

§. 40. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind zwei Seiten a und c und der eingeschlossene Winkel β bekannt. Die übrigen Stücke zu bestimmen.

Auflösung I. Es ist $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$

Fig. 19.



$$= (a+c)^2 - 4ac \, . \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta \ (\S. 39, II),$$

daher $b = \sqrt{(a+c)^2 - 4ac \, . \cos^2 \frac{1}{2}\beta}$.

Dieser Ausdruck ist logarithmisch nicht bequem zu berechnen.

Auflösung II. Es ist $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, daher (nach §. 32)

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{a - c}{a + c} \, . \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma).$$

Da $(\alpha + \gamma)$ bekannt ist, so erhält man durch die Gleichung zunächst $(\alpha - \gamma)$, und aus $(\alpha + \gamma)$ und $(\alpha - \gamma)$ alsdann α und γ. Sind diese Winkel gefunden, so erhält man endlich noch

$$b = (c \, . \sin\beta) : \sin\gamma.$$

Beispiel zu Auflös. II. Es sei $a = 150{,}8$; $c = 60{,}7$; $\beta = 99^0\, 4'$. Alsdann ist

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \log 90{,}1 + \log \operatorname{tg} 40^0\, 28' - \log 211{,}5$$

$$= 1{,}9547248 + 9{,}9309872 - 2{,}3253104$$

$$= 9{,}5604016,$$

daher $\alpha - \gamma = 39^0\, 56'\, 37{,}3''$.

Aus $\alpha + \gamma = 80^0\, 56'$ und $\alpha - \gamma = 39^0\, 56'\, 37{,}3''$ folgt:

$$\alpha = 60^0\, 26'\, 18{,}6''; \ \gamma = 20^0\, 29'\, 41{,}3''.$$

Ferner ist $\log b = \log c + \log \sin\beta - \log \sin\gamma$

$$= 1{,}7831887 + 9{,}9945396 - 9{,}5442199$$

$$= 2{,}2335084,$$

daher $b = 171{,}201\ldots$

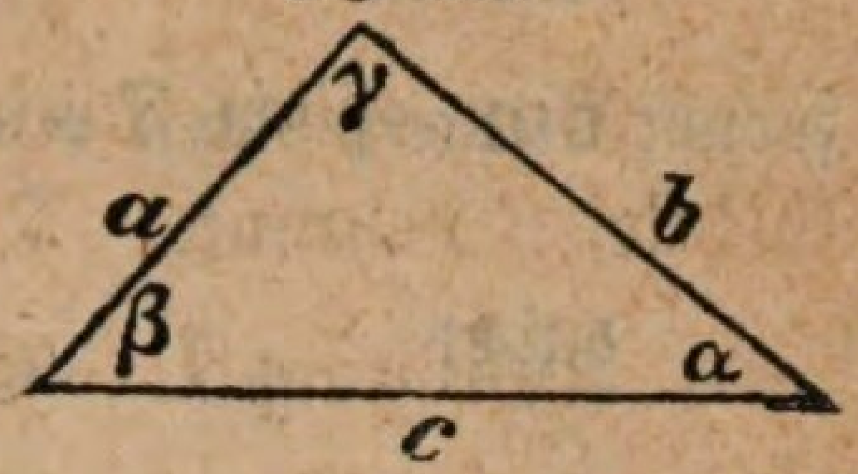
§. 41. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind zwei Seiten a und b und der nicht von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α bekannt. Die übrigen Stücke zu bestimmen.

Auflösung. Es ist $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$,

daher $\sin\beta = (b \,.\, \sin\alpha) : a$.

Fig. 20.



Dieser für $\sin\beta$ gefundene Werth kann aber sowohl dem Winkel β, wie auch dem Winkel $(2R - \beta)$ zugehören, und die Aufgabe läßt daher zwei Lösungen zu, wenn nicht zugleich angegeben ist, ob β spitz oder stumpf sein soll. Zur Bestimmung der übrigen Stücke dienen die Gleichungen:

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta),$$
$$c = (b \,.\, \sin\gamma) : \sin\beta,$$

welche ebenfalls zwei Lösungen liefern, wenn die Natur von β nicht näher bestimmt ist.

Beispiel. Es sei $b = 76{,}32$; $a = 53{,}14$; $\alpha = 34^0\,24'\,58''$, so ist

$$\log\sin\beta = \log 76{,}32 + \log\sin 34^0\,24'\,58'' - \log 53{,}14$$
$$= 1{,}8826384 + 9{,}7522014 - 1{,}7254216$$
$$= 9{,}9094192,$$

daher $\beta = 54^0\,16'$, oder $\beta = 125^0\,44'$.

Ist $\beta = 54^0\,16'$, so ist $\gamma = 91^0\,19'\,2''$; $c = 98{,}424$.

Ist $\beta = 125^0\,44'$, so ist $\gamma = 19^0\,51'\,2''$; $c = 31{,}925$.

Fünftes Capitel.

Von den zusammengesetzten trigonometrischen Aufgaben.

§. 42. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt die drei Winkel α, β, γ und die Summe s der drei Seiten. Die Seiten a, b, c und den Inhalt J zu bestimmen.

Auflösung. Es ist $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$, daher

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) : \sin\gamma = (a + b + c) : c = s : c,$$

$$\text{also } c = \frac{s \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Nun ist $\sin\gamma = 2 \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$

ferner $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\beta \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\gamma$ (§. 18),

daher $$c = \frac{s \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\gamma}{2 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\beta}.$$

Auf dieselbe Art findet man die Gleichungen:

$$b = \frac{s \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\beta}{2 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\gamma}, \quad a = \frac{s \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\alpha}{2 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\beta \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\gamma}.$$

Folglich ist $J = \tfrac{1}{2}ab \,.\, \sin\gamma = \tfrac{1}{4}s^2 \,.\, tg\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, tg\tfrac{1}{2}\beta \,.\, tg\tfrac{1}{2}\gamma.$

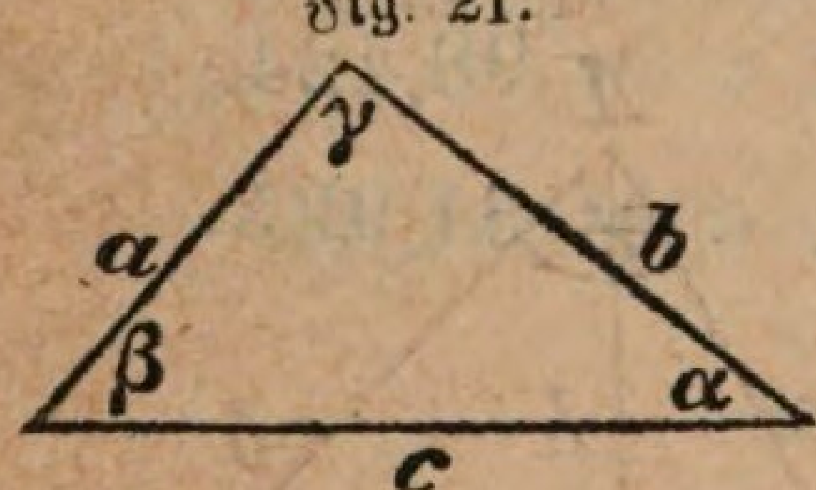
§. 43. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt die Seite c, ihr Gegenwinkel γ und die Summe s der Seiten a und b. Die Seiten a und b, ferner deren Gegenwinkel α und β zu bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos\gamma,$$

Fig. 21.



$$= (a+b)^2 - 4ab \,.\, \cos^2\frac{\gamma}{2} \quad (§. 39, II)$$

$$= s^2 - 4ab \,.\, \cos^2\frac{\gamma}{2},$$

daher $ab = (s^2 - c^2) : 4\cos^2\frac{\gamma}{2} = p.$

Aus $(a+b) = s$ und $ab = p$ findet man aber:

$$a = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4p}),$$

$$b = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4p}).$$

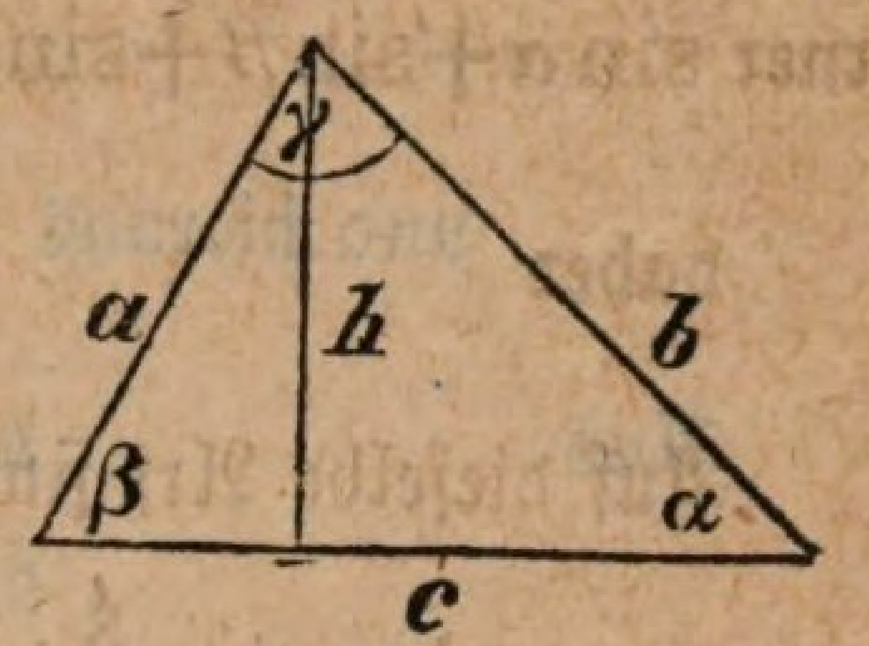
Die Winkel bestimmt man nach §. 31.

§. 44. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt die Seite c, ihr Gegenwinkel γ und die zu c gehörende Höhe h. Die übrigen Stücke zu bestimmen.

Auflösung. Es ist 1) $c^2 = (a+b)^2 - 4ab \,.\, \cos^2\frac{\gamma}{2}$ (§. 43).

Fig. 22.



Ferner ist $2J = ch$, aber auch $2J = ab \,.\, \sin\gamma$,

daher 2) $ab = \frac{ch}{\sin\gamma} = \frac{ch}{2\sin\frac{1}{2}\gamma \,.\, \cos\frac{1}{2}\gamma} = p.$

Setzt man diesen Werth in 1) ein, so erhält man:

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ch \,.\, \mathrm{ctg}\, \tfrac{1}{2}\gamma,$$

daher 3) $\quad a + b = \sqrt{c^2 + 2ch \,.\, \mathrm{ctg}\, \frac{1}{2}\gamma} = s.$

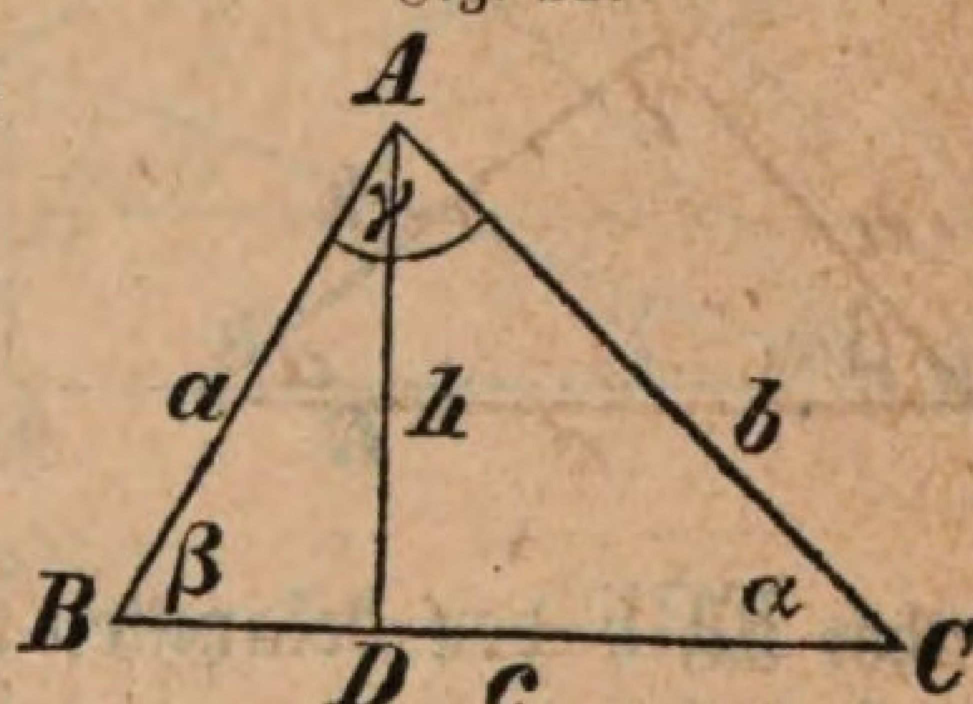
Aus $(a+b) = s$ und $ab = p$ findet man aber:

$$a = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4p}),$$
$$b = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4p}).$$

§. 45. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt die Summe s der drei Seiten a, b, c, der der Seite c gegenüberliegende Winkel γ und die zu c gehörende Höhe h. Die übrigen Stücke zu bestimmen.

Fig. 23.



Auflösung. Es ist $2J = ab \,.\, \sin\gamma$ und $2J = hc = h[s - (a+b)]$, daher

$$1) \quad ab \,.\, \sin\gamma = hs - h\,(a+b).$$

Ferner ist $c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{1}{2}\gamma$, oder, da $c = s - (a+b)$ ist,

$$s^2 + (a+b)^2 - 2s \,.\, (a+b) = (a+b)^2 - 4ab\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma, \text{ daher}$$

$$2) \quad ab = \frac{2s(a+b) - s^2}{4\cos^2\frac{1}{2}\gamma}.$$

Setzt man diesen Werth in 1) ein, so erhält man:

$$\frac{[2s(a+b) - s^2] \,.\, \sin\gamma}{4\cos^2\frac{1}{2}\gamma} = hs - h\,(a+b), \text{ daher}$$

$$a + b = \frac{s\,(2h + s \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\gamma)}{2h + 2s \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\gamma} = \frac{s\,(2h + 2s \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\gamma) - s^2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\gamma}{2h + 2s \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\gamma},$$

oder 3) $a + b = s - \frac{s^2}{2h \cdot ctg \frac{1}{2}\gamma + 2s}$,

und hieraus 4) $c = s - (a+b) = \frac{s^2}{2h \cdot ctg \frac{1}{2}\gamma + 2s}$.

Aus $a + b = s - c$ und

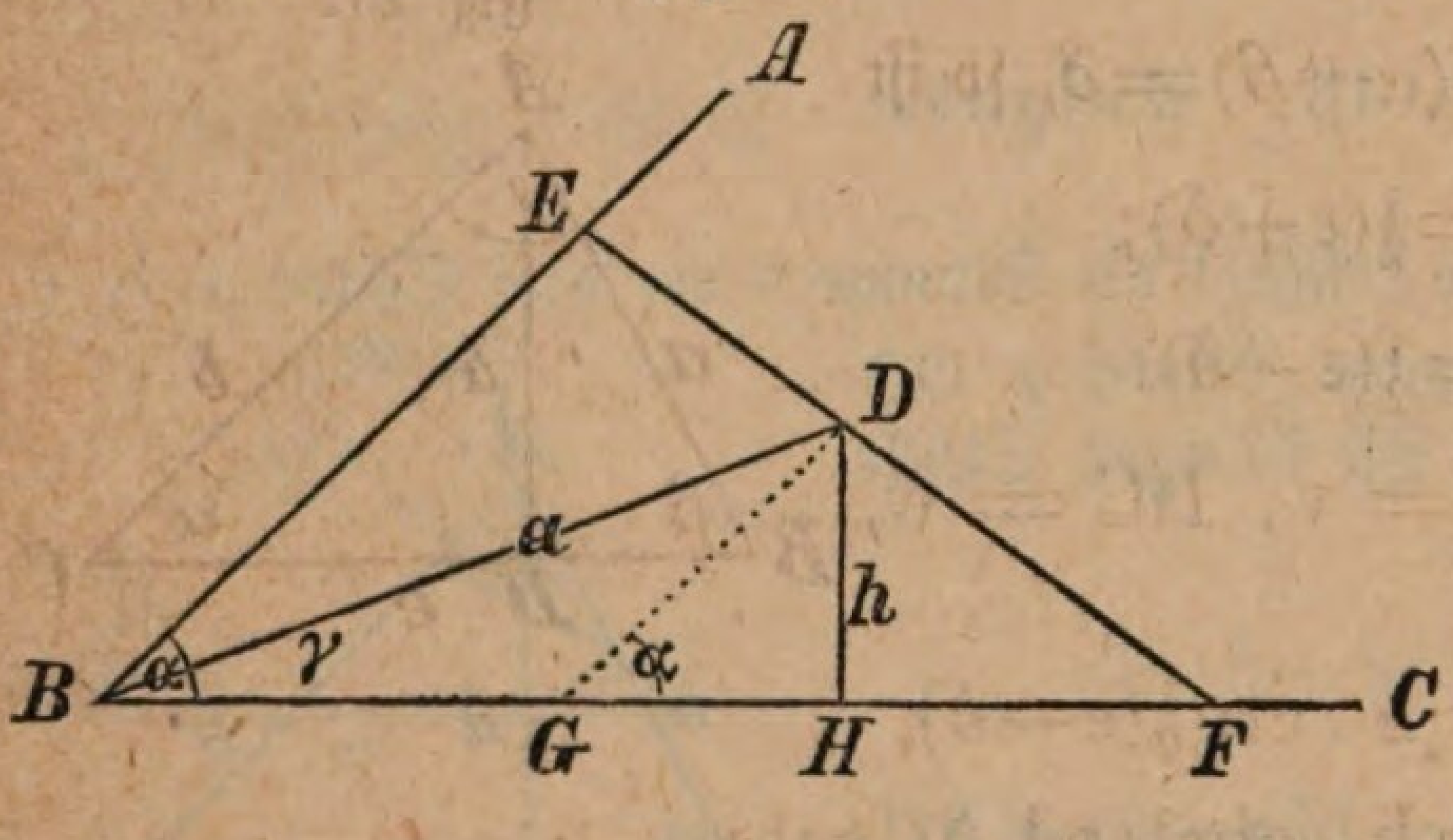
$a \cdot b = (h \cdot c) : \sin\gamma$

sind endlich a und b leicht zu bestimmen. (Vergl. §§. 43 und 44.)

§. 46. Aufgabe.

Innerhalb der Fläche des Winkels $ABC = \alpha$ ist der Punkt D gegeben. Durch D hindurch die Linie EDF so zu ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck EBF den Inhalt m^2 erhält.

Fig. 24.



Auflösung. Der Punkt D sei durch die Linie $BD = a$ und den Winkel γ bestimmt. Alsdann ist auch die auf BC senkrecht stehende Linie DH $= h$ durch die Gleichung $h = a \cdot \sin\gamma$ gegeben. Zieht man nun $DG \parallel AB$, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke EBF und DGF, von denen EBF den bekannten Inhalt m^2 hat. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke folgt:

$$\triangle EBF : \triangle DGF = BF^2 : GF^2, \text{ oder}$$

$$m^2 : \tfrac{1}{2}GF \cdot h = BF^2 : GF^2, \text{ oder}$$

$$1) \qquad m^2 : \tfrac{1}{2}h = BF^2 : GF.$$

Bezeichnet man nun BF durch x, so ist $GF = x - BG = x - (BH - GH) = x - (a \cdot \cos\gamma - h \cdot ctg\,\alpha)$, oder, wenn man für h seinen Werth $a \cdot \sin\gamma$ einsetzt:

$$GF = x - \left(a \cdot \cos\gamma - \frac{a \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = x - a\left(\frac{\cos\gamma \sin\alpha - \sin\gamma \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$= x - a \cdot \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha} = x - p.$$

Setzt man diesen Werth in 1) ein, so erhält man:

$$m^2 : \tfrac{1}{2}h = x^2 : (x-p), \text{ oder}$$

$$2)\ x^2 - \frac{2m^2}{h} . x = - \frac{2m^2p}{h}.$$

Setzt man nun $\frac{m^2}{h} = n$, so erhält man

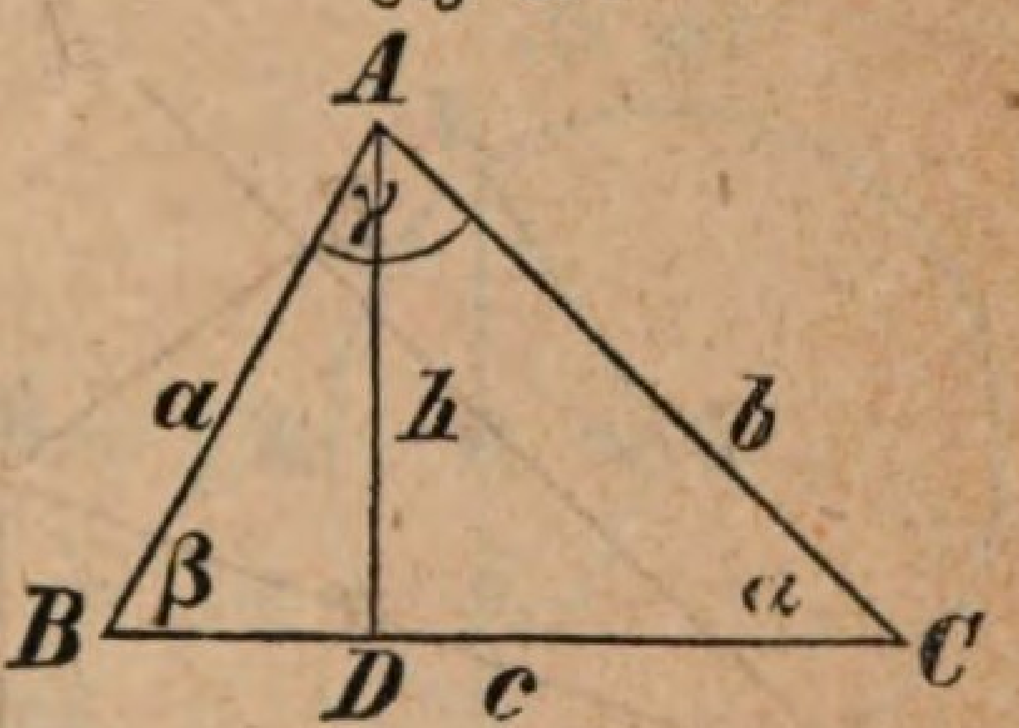
$$3)\qquad x = n \mp \sqrt{n^2 - 2np}.$$

Man erhält also zwei Lösungen.

§. 47. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt die Seite c, die zu ihr gehörende Höhe h und die Differenz δ der zwei an der Seite c liegenden Winkel α und β. Die übrigen Stücke zu bestimmen.

Fig. 25.



Auflös. Ist $(\alpha+\beta)=\varepsilon$, $(\alpha-\beta)=\delta$, so ist

$$1)\qquad \alpha=\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta);$$

$$2)\qquad \beta=\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta).$$

Setzt man ferner BD = v, DC = w, so ist

$$v = h . ctg\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta),$$

$$w = h . ctg\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta), \text{ daher}$$

$$c=v + w = h[ctg\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta) + ctg\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta)], \text{ oder}$$

$$c=h.\frac{\sin\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\delta) . \sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\delta)} = h.\frac{\sin\varepsilon}{\frac{1}{2}(\cos\delta-\cos\varepsilon)} \text{ (nach §. 7),}$$

daher 3) $c . \cos\delta = 2h . \sin\varepsilon + c . \cos\varepsilon.$

Setzt man in dieser Gleichung, in der $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ unbekannt sind, $\sin\varepsilon = \sqrt{1-\cos^2\varepsilon}$, so erhält man:

$$4)\ \cos\varepsilon = \frac{c^2\cos\delta \mp 2h\sqrt{c^2\sin^2\delta + 4h^2}}{c^2 + 4h^2}.$$

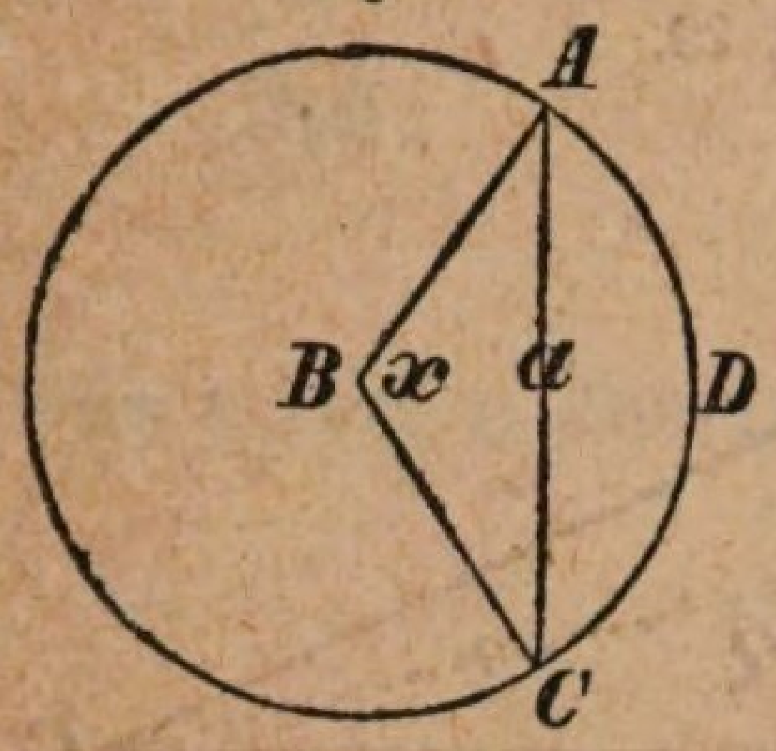
Aus ε und δ findet man nun α und β nach 1) und 2).

Anm. Die Gleichung 3) läßt sich in bequemerer Art nach §. 36, 1 lösen. Setzt man $c : 2h = tg\, v$, so ist $\sin(\varepsilon + v) = \sin v \cos\delta$. Da $(\varepsilon + v)$ in zwei Quadranten liegen kann, so erhält man, wie in 4), ebenfalls zwei Lösungen.

§. 48. Aufgaben.

I. Aus der Sehne a und dem Radius r den Inhalt J des Kreisausschnittes ABCD zu bestimmen.

Fig. 26.



Auflösung. Es ist $J : r^2\pi = x : 360$,

daher $$J = \frac{x}{360} \cdot r^2\pi.$$

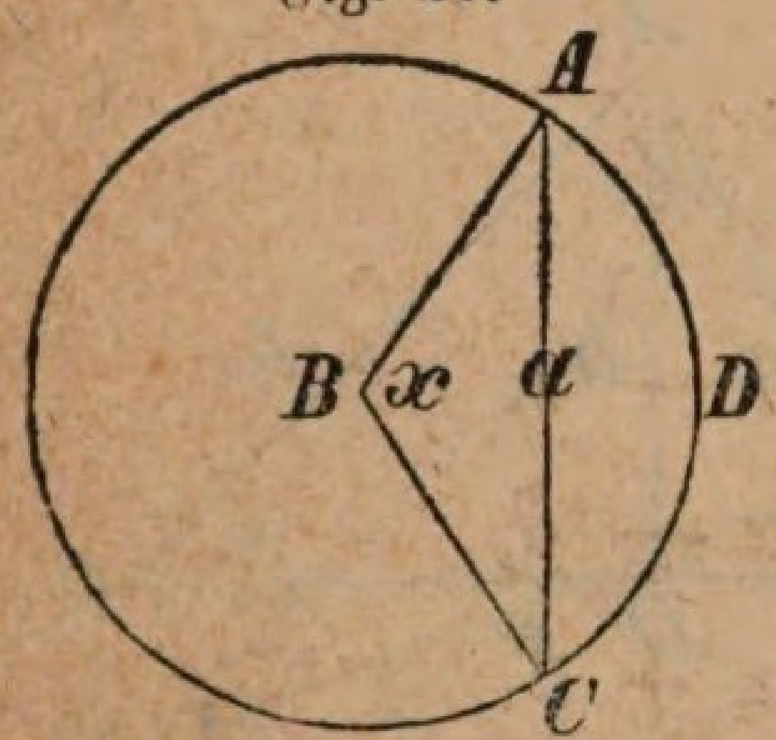
Der Winkel x ist gegeben durch die Gleichung

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{a}{2r}.$$

II. Aus der Sehne a und dem Radius r den Inhalt des Kreisabschnittes ACD zu bestimmen.

Auflösung. Es ist

Fig. 27.



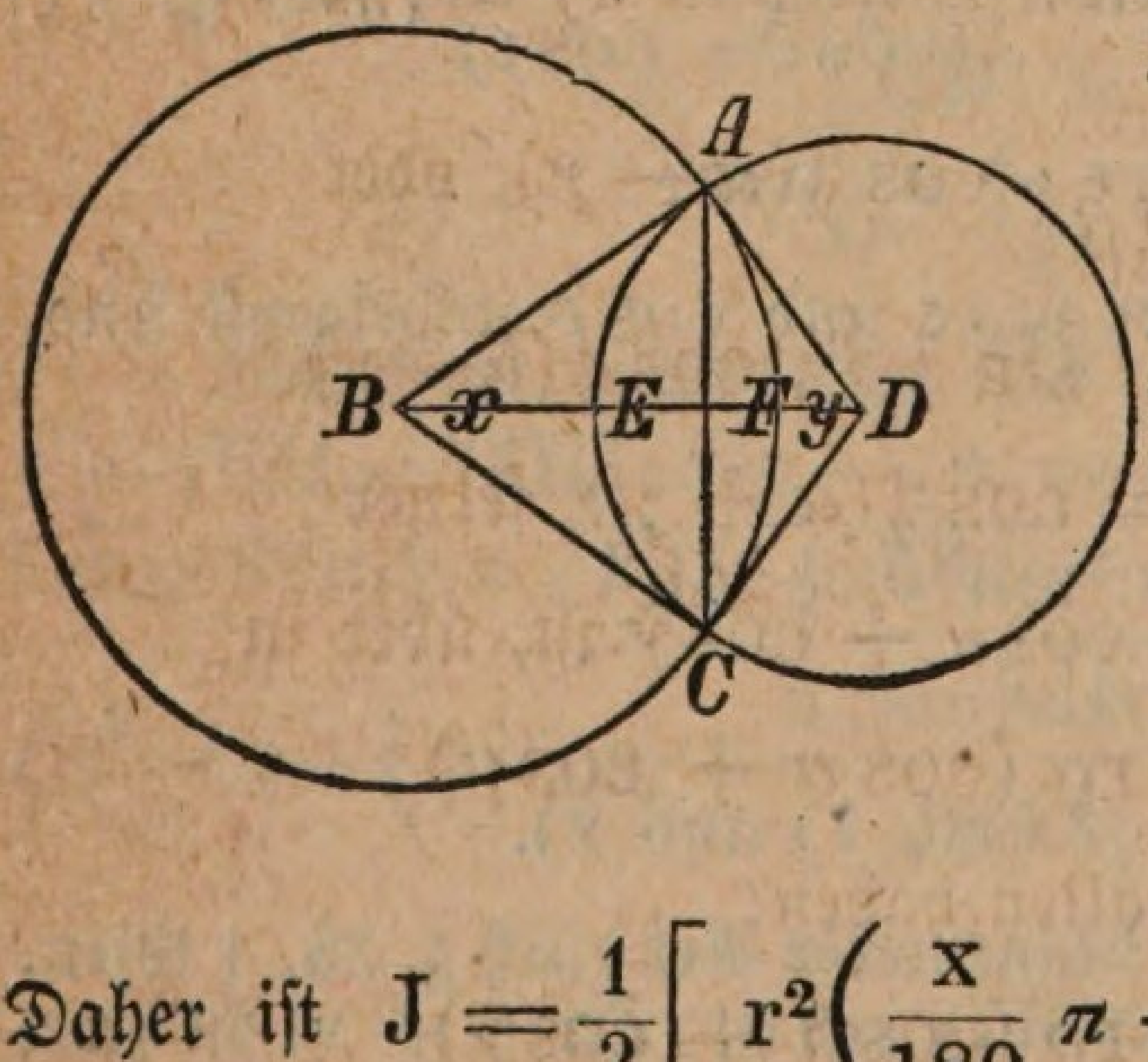
$$ABCD = \frac{x}{360} \cdot r^2\pi \text{ (nach I)},$$

ferner $$ABC = \frac{r^2}{2} \cdot \sin x,$$

daher $$ACD = \frac{r^2}{2}\left(\frac{x}{180}\pi - \sin x\right).$$

III. Aus den Radien r und ϱ zweier sich schneidenden Kreise und aus der gemeinschaftlichen Sehne a den Inhalt J des Mondes AECF zu bestimmen.

Fig. 28.



Auflösung. Es ist J=AFC+AEC. Ist nun $BA = r$, $DA = \varrho$, $AC = a$,

so ist $$\sin\frac{x}{2} = \frac{a}{2r}, \quad \sin\frac{y}{2} = \frac{a}{2\varrho};$$

ferner ist nach II

$$ACF = \tfrac{1}{2}r^2\left(\frac{x}{180}\pi - \sin x\right),$$

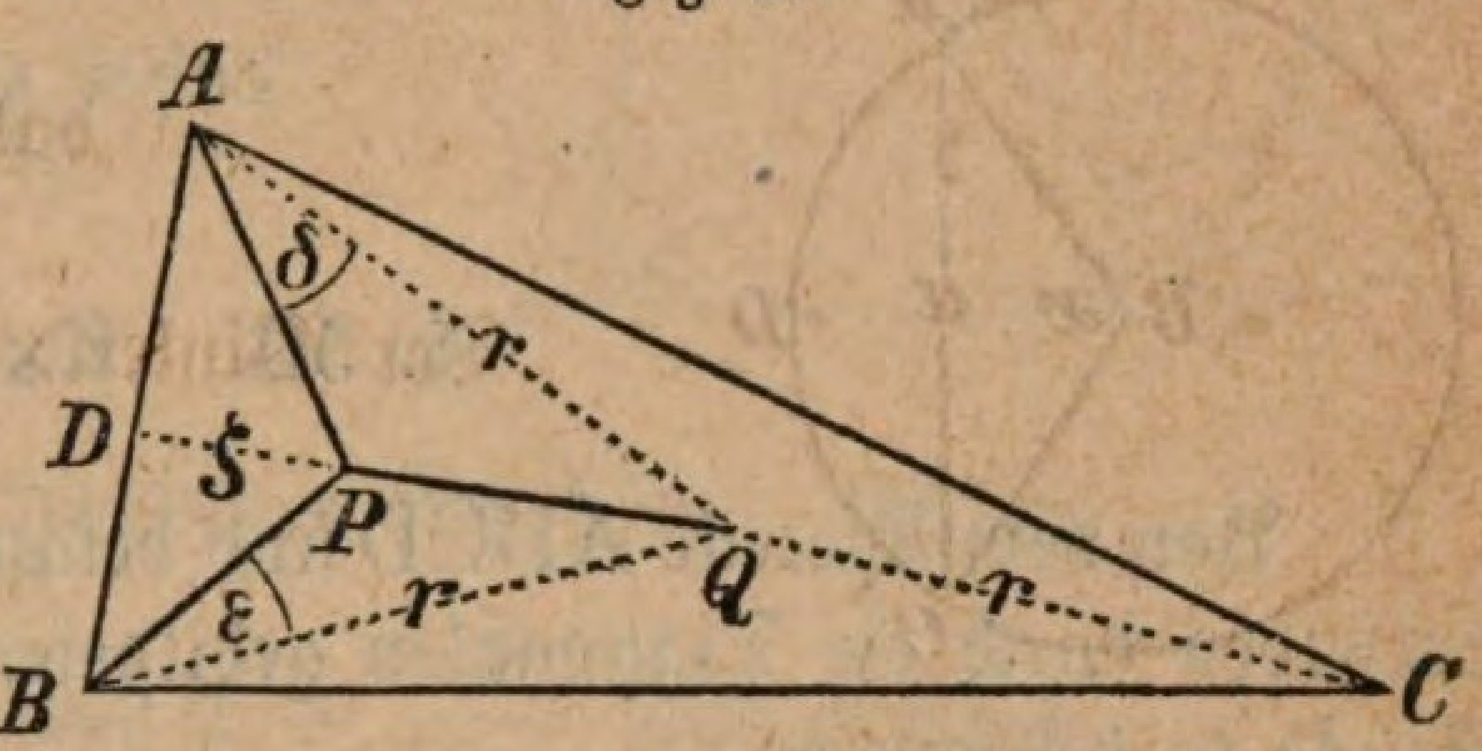
$$ACB = \tfrac{1}{2}\varrho^2\left(\frac{y}{180}\pi - \sin y\right).$$

Daher ist $$J = \frac{1}{2}\left[r^2\left(\frac{x}{180}\pi - \sin x\right) + \varrho^2\left(\frac{y}{180}\pi - \sin y\right)\right].$$

§. 49. Aufgabe.

Von einem Dreiecke sind bekannt der Radius r des umgeschriebenen und der Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises. Die Entfernung x der beiden Mittelpunkte von einander zu bestimmen.

Fig. 29.



Auflös. Es sei Q der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, daher QB = QC = QA = r; ferner sei P der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, PD = ϱ der Radius desselben, PQ = x. Dann ist im Dreiecke PBQ:

$$1)\ x^2 = PB^2 + r^2 - 2PB \cdot r \cdot \cos\varepsilon.$$

In dieser Gleichung sind PB und ε näher zu bestimmen. Bezeichnet man die bei A, B, C liegenden Winkel des Dreiecks ABC durch α, β, γ, so ist $\sphericalangle DBP = \frac{1}{2}\beta$, daher

$$2)\ BP = \varrho \cdot \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\beta.$$

Ferner ist

$$\sphericalangle QCB = \sphericalangle QBC, \text{ oder } \sphericalangle QCB = \tfrac{1}{2}\beta - \varepsilon,$$
$$\sphericalangle QCA = \sphericalangle QAC, \text{ „ } \sphericalangle QCA = \tfrac{1}{2}\alpha - \delta,$$
$$\sphericalangle QBD = \sphericalangle QAD, \text{ „ } \tfrac{1}{2}\beta + \varepsilon = \tfrac{1}{2}\alpha + \delta.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so erhält man:

$$\gamma + \tfrac{1}{2}\beta + \varepsilon = \tfrac{1}{2}\beta + \alpha - \varepsilon, \text{ oder}$$
$$3)\quad \varepsilon = \tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma).$$

Setzt man die in 2) und 3) gefundenen Werthe in 1) ein, so ist

$$x^2 = \frac{\varrho^2}{\sin^2\frac{1}{2}\beta} + r^2 - \frac{2\varrho r}{\sin\frac{1}{2}\beta} \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma), \text{ oder}$$
$$(r^2 - x^2)\sin^2\tfrac{1}{2}\beta + \varrho^2 = 2\varrho r \cdot \sin\tfrac{1}{2}\beta \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma).$$

Diese Gleichung geht, da $\sin\frac{1}{2}\beta = \cos\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, ferner $2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \cos\alpha + \cos\gamma$ ist, über in

$$4)\ (r^2 - x^2)\sin^2\tfrac{1}{2}\beta + \varrho^2 = r\varrho\,(\cos\alpha + \cos\gamma).$$

Ebenso würde man im Dreiecke PAQ erhalten haben:

$$5)\ (r^2 - x^2) \cdot \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + \varrho^2 = r\varrho\,(\cos\beta + \cos\gamma).$$

Subtrahirt man nun 5) von 4), so erhält man:

$$6)\ (r^2-x^2)(\sin^2\tfrac{1}{2}\beta-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha) = r\varrho(\cos\alpha-\cos\beta),\text{ oder}$$

$$(r^2-x^2)(\sin^2\tfrac{1}{2}\beta-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha) = 2\,r\varrho(\sin^2\tfrac{1}{2}\beta-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha),\text{*)}$$

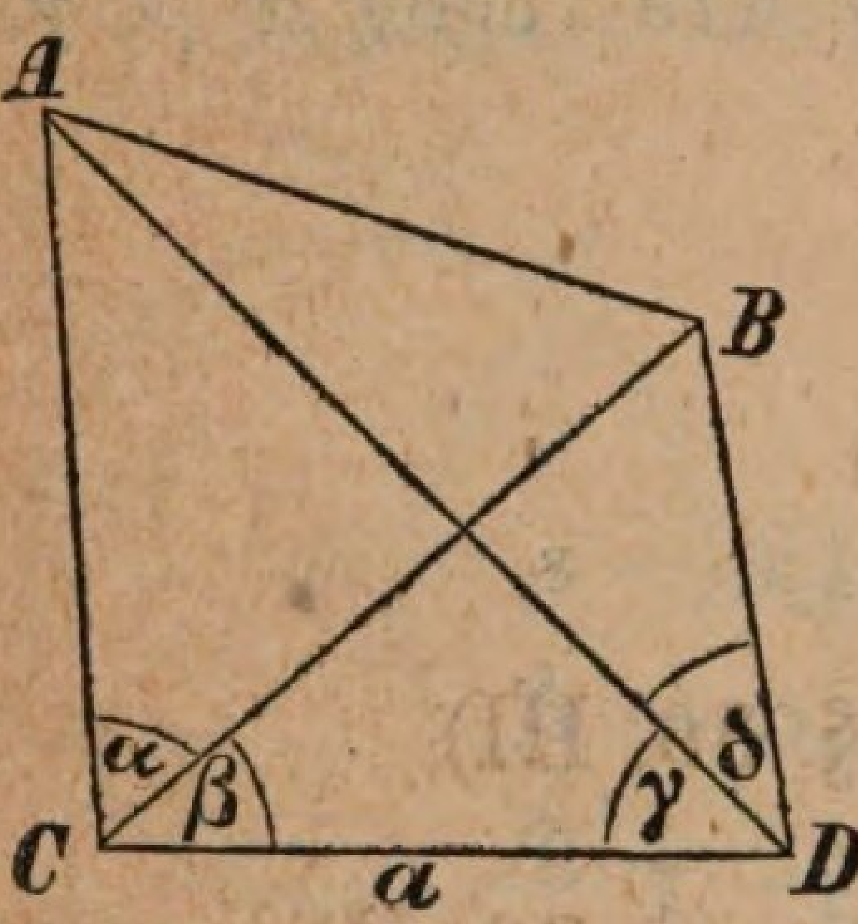
$$\text{oder } r^2-x^2 = 2\,r\varrho,$$

$$\text{daher } x = \sqrt{r^2-2r\varrho}.$$

§. 50. Aufgabe.

Von dem Vierecke ABCD sind bekannt die Seite CD=a und die vier an derselben durch die Diagonalen gebildeten Winkel α, β, γ, δ. Die übrigen Stücke zu bestimmen.

Fig. 30.



Auflösung. Es ist im $\triangle$ACD

$$1)\ AD = \frac{a\,.\,\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$2)\ AC = \frac{a\,.\,\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Ferner ist im $\triangle$BCD

$$3)\ BD = \frac{a\,.\,\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)};$$

$$4)\ BC = \frac{a\,.\,\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}.$$

Da nun AD, BD und δ bekannt sind, so erhält man aus diesen Stücken leicht die Seite AB und den Winkel ABD (nach §. 40).

§. 51. Aufgabe.

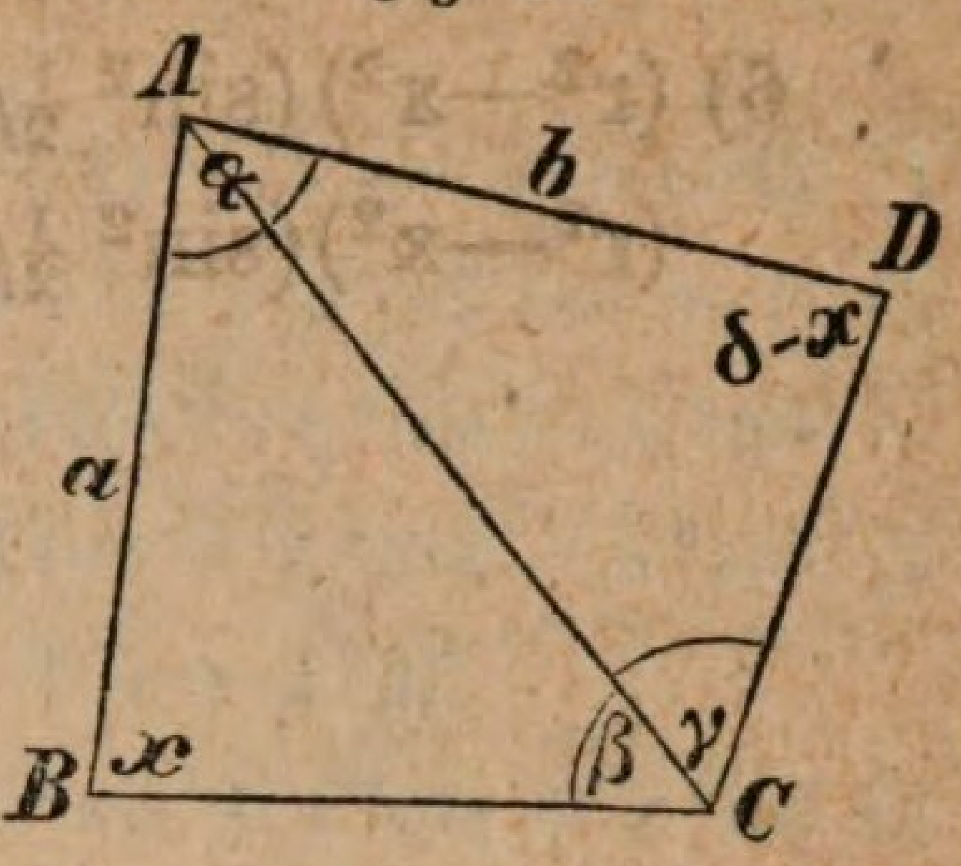
Von dem Vierecke ABCD sind bekannt die Seiten AB = a und AD = b, der Winkel BAD = α, und die an der Ecke C durch die Diagonale AC gebildeten Winkel β und γ. Die übrigen Stücke zu bestimmen (Pothenot'sche Aufgabe).

Auflösung. Bezeichnet man $4R-\alpha-\beta-\gamma$ durch δ, und ist $\sphericalangle$ ABC = x, so ist $\sphericalangle$ ADC = δ — x.

---

*) Man setzt $\cos\alpha = 1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$ und $\cos\beta = 1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta$.

Fig. 31.



Nun ist $AC = \frac{a \,.\, \sin x}{\sin \gamma}$, ferner auch

$$AC = \frac{b \,.\, \sin(\delta - x)}{\sin \gamma}, \text{ also}$$

$$\frac{a \sin x}{\sin \beta} = \frac{b \sin(\delta - x)}{\sin \gamma}.$$

Diese Gleichung läßt sich in verschiedener Art lösen. Es ist:

$$1)\quad \frac{a \sin x}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \gamma} \sin \delta \cos x - \frac{b}{\sin \gamma} \cos \delta \sin x,$$

$$\text{oder } \frac{a}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin \gamma} \sin \delta \operatorname{ctg} x - \frac{b}{\sin \gamma} \cos \delta,$$

$$\text{oder } \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \delta + \frac{a \sin \gamma}{b \sin \beta \sin \delta};$$

$$2)\quad \sin x = \frac{b \sin \beta}{a \sin \gamma} \,.\, \sin(\delta - x), \text{ daher}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(2x - \delta) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta \,.\, \frac{b \sin \beta - a \sin \gamma}{b \sin \beta + a \sin \gamma} \text{ (§. 36, III)},$$

oder, wenn $a \sin \gamma : b \sin \beta = \operatorname{tg} v$ gesetzt wird (§. 36, II),

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(2x - \delta) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta \,.\, \operatorname{ctg}(45 + v).$$

Anm. Ist $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, also auch $\delta = 2R$, so ist die Aufgabe nicht zu lösen, wie sich leicht aus einer Betrachtung der gewonnenen Resultate ergiebt. Dasselbe findet man bei der Lösung durch geometrische Construction. Beschreibt man nämlich einen Kreis über der Linie AD als Sehne, so daß der zu AD gehörende Peripheriewinkel $= \gamma$ ist, ferner einen zweiten Kreis über der Sehne AB, so daß zu derselben der Peripheriewinkel β gehört, so bezeichnet der Durchschnittspunkt beider Kreise den Punkt C. Ist aber $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, so fallen beide Kreise zusammen und haben keinen Durchschnittspunkt.

Uebungssätze.

1) $(2\sin\alpha + \sin 2\alpha) : (2\sin\alpha - \sin 2\alpha) = \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\alpha$;

2) $(1 + \cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha = \sin 2\alpha$;

3) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$;

4) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$.

Ist $x + y + z = R$, so ist

5) $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1 - 2\sin x \sin y \sin z$;

6) $\sin 4x + \sin 4y + \sin 4z = 4 \sin 2x \sin 2y \sin 2z$;

7) $\sin 4x + \sin 4y - \sin 4z = 4 \cos 2x \cos 2y \sin 2z$.

Ist $x + y + z = 2R$, so ist

8) $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 2 + 2\cos x \cos y \cos z$;

9) $\sin^2 x + \sin^2 y - \sin^2 z = 2 \sin x \sin y \cos z$;

10) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 - 2 \sin x \sin y \cos z$;

11) $\cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z = 1 - 2 \cos x \cos y \cos z$;

12) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z = 1$.

Aufgaben.

I. Aus dem bekannten Werthe einer trigonometrischen Funktion die absoluten Werthe der übrigen Funktionen zu bestimmen. Es ist gegeben:

1) $\sin\alpha = 0{,}56760$; 2) $\cos\alpha = 0{,}85035$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}70281$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}03553$;

5) $\sec\alpha = 1{,}15009$; 6) $\operatorname{cosec}\alpha = 3{,}68401$.

II. Folgende Gleichungen nach x aufzulösen unter der Voraussetzung, daß x in den zwei ersten Quadranten liegt.

7) $\cos\frac{1}{2}x = \sin x$; 8) $6\sin x = 3\cos x$;

9) $\sin x \operatorname{tg} x = 1 : 2$; 10) $\cos x = \operatorname{tg} x$;

11) $\sin x + \cos x = \sec x$; 12) $\frac{1}{2}\sin 2x = \cos^2 x$;

13) $\sin(x + \alpha) : \sin(x - \alpha) = m$; 14) $m \sin(\alpha + x) = n \sin(\beta - x)$;

51) $a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = 0$.

Auflösungen.

1) $\cos\alpha = 0{,}8223$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6894$; $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}450$; $\sec\alpha = 1{,}215$; $\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}761$; 2) $\sin\alpha = 0{,}5262$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6188$; $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}6159$;

sec $\alpha = 1{,}175$; cosec $\alpha = 1{,}903$; **3**) sin $\alpha = 0{,}5750$; cos $\alpha = 0{,}8181$; ctg $\alpha = 1{,}422$; sec $\alpha = 1{,}222$; cosec $\alpha = 1{,}739$; **4**) sin $\alpha = 0{,}6946$; cos $\alpha = 0{,}7193$; tg $\alpha = 0{,}9656$; sec $\alpha = 1{,}390$; cosec $\alpha = 1{,}439$; **5**) sin $\alpha = 0{,}4939$; cos $\alpha = 0{,}8694$; tg $\alpha = 0{,}5680$; ctg $\alpha = 1{,}7603$ cosec $\alpha = 2{,}024$; **6**) sin $\alpha = 0{,}2714$; cos $\alpha = 0{,}9624$; tg $\alpha = 0{,}2820$; ctg $\alpha = 3{,}545$; sec $\alpha = 1{,}039$; **7**) $x = 60^0$ oder 180^0; **8**) $x = 26^0 33' 54''$; **9**) $x = 38^0 40' 58''$; **10**) $x = 38^0 4' 9''$; **11**) $x = 0$ oder 45^0; **12**) $x = 45^0$ oder 90^0; **13**) $\operatorname{tg} x = (m + 1) \operatorname{tg} \alpha : (m - 1)$;

14) $\operatorname{tg} x = (n \sin \beta - m \sin \alpha) : (m \cos \alpha + n \cos \beta)$;

15) $\sin 2x = (2a : b^2)\left(a \mp \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

III. Aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks die übrigen zu berechnen*).

		A	B	A	B
16)	a =	58,0600	58,0600	78,6210	78,6210
	b =	89,3780	89,3780	19,7758	19,7758
	c =	106,5804	43,3237	81,0700	71,4220
	J =	2594,6423	1054,6924	777,3963	684,8796
	α =	33° 0′ 28″	33° 0′ 28″	75° 52′ 52″	104° 7′ 8″
	β =	56° 59′ 32″	123° 0′ 28″	14° 7′ 8″	14° 7′ 8″
	γ =	90° 0′ 0″	23° 59′ 4″	90° 0′ 0″	61° 45′ 44″
20)	a =	63,0900	63,0900	46,2800	46,2800
	b =	58,2942	58,2942	213,6823	213,6823
	c =	85,8986	6,7769	218,6366	199,0440
	J =	1838,8925	145,0774	4944,6080	4501,5083
	α =	47° 15′ 45″	132° 44′ 15″	12° 13′ 14″	12° 13′ 14″
	β =	42° 44′ 15″	42° 44′ 15″	77° 46′ 46″	102° 13′ 14″
	γ =	90° 0′ 0″	4° 31′ 30″	90° 0′ 0″	65° 33′ 32″

*) In den Aufgaben 16—49 sind a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks, α, β, γ ihre Gegenwinkel; J ist der Inhalt. Wenn von einem in der Columne A stehenden Dreiecke zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel gegeben sind, so ist die zweite mögliche Lösung in einer der Columnen B und C zu suchen. Es ist hierbei zu beachten, daß bei den zu berechnenden Werthen die letzten Decimalstellen (oder die genaue Secundenzahl) nur dann stimmen können, wenn dieselben drei Stücke als bekannt gegeben werden, die bei der Berechnung dieser Dreiecke zu Grunde gelegt worden sind.

		A	B	A	B
24)	a =	138,2600	138,2600	55,5000	55,5000
	b =	37,1997	37,1997	49,5000	49,5000
	c =	143,1770	123,8468	74,3672	8,4716
	J =	2571,6171	2224,4260	1373,6250	156,4790
	α =	74° 56′ 27″	105° 3′ 33″	48° 16′ 14″	131° 43′ 46″
	β =	15° 3′ 33″	15° 3′ 33″	41° 43′ 46″	41° 43′ 46″
	γ =	90° 0′ 0″	59° 52′ 54″	90° 0′ 0″	6° 32′ 28″
28)	a =	13,7754	13,7754	40,4848	40,4848
	b =	18,7072	18,7072	42,9573	42,9573
	c =	23,2319	6,8957	59,0284	3,4950
	J =	128,8500	38,2451	869,5600	51,4862
	α =	36° 22′ 0″	36° 22′ 0″	43° 18′ 10″	43° 18′ 10″
	β =	53° 38′ 0″	126° 22′ 0″	46° 41′ 50″	133° 18′ 10″
	γ =	90° 0′ 0″	17° 16′ 0″	90° 0′ 0″	3° 23′ 40″

		A	B	C
32)	a =	16,4500	16,4500	16,4500
	b =	19,2342	19,2342	3,9337
	c =	13,9620	7,1158	13,9620
	J =	112,3241	57,2466	22,9725
	α =	56° 46′ 30″	56° 46′ 30″	123° 13, 30″
	β =	77° 59′ 22″	102° 0′ 38″	11° 32′ 22″
	γ =	45° 14′ 8″	21° 12′ 52″	45° 14′ 8″
35)	a =	17,8600	17,8600	17,8600
	b =	14,4835	14,4835	3,8233
	c =	16,2359	6,7263	16,2359
	J =	111,0600	46,0107	29,3175
	α =	70° 50′ 6″	109° 9′ 54″	109° 9′ 54″
	β =	49° 59′ 46″	49° 59′ 46″	11° 39′ 58″
	γ =	59° 10′ 8″	20° 50′ 20″	59° 10′ 8″
38)	a =	28,4500	28,4500	9,1997
	b =	44,0943	31,6738	44,0943
	c =	46,9685	46,9685	46,9685
	J =	612,1154	439,6956	197,9367

		A	B	C
	$\alpha =$	36° 14′ 11″	36° 14′ 11″	11° 1′ 11″
	$\beta =$	66° 22′ 19″	41° 9′ 19″	66° 22′ 19″
	$\gamma =$	77° 23′ 30″	102° 36′ 30″	102° 36′ 30″
41)	a =	44,3100	44,3100	44,3100
	b =	30,0324	30,0324	26,6061
	c =	34,1231	31,1075	34,1231
	J =	511,7465	466,5217	453,3624
	$\alpha =$	87° 7′ 20″	92° 52′ 40″	92° 52′ 40″
	$\beta =$	42° 36′ 11″	42° 36′ 11″	36° 50′ 51″
	$\gamma =$	50° 16′ 29″	44° 31′ 9″	50° 16′ 29″
44)	a =	30,2500	30,2500	22,4263
	b =	47,5261	47,5261	47,5261
	c =	39,7534	33,7999	39,7534
	J =	598,3524	508,7444	443,5980
	$\alpha =$	39° 18′ 6″	39° 18′ 6″	28° 0′ 26″
	$\beta =$	84° 21′ 10″	95° 38′ 50″	95° 38′ 50″
	$\gamma =$	56° 20′ 44″	45° 3′ 4″	56° 20′ 44″
47)	a =	54,2922	43,0610	54,2922
	b =	43,0610	43,0610	28,9004
	c =	64,7466	64,7466	64,7466
	J =	1158,9560	919,2072	777,8336
	$\alpha =$	56° 14′ 24″	41° 15′ 12″	56° 14′ 24″
	$\beta =$	41° 15′ 12″	41° 15′ 12″	26° 16′ 0″
	$\gamma =$	82° 30′ 24″	97° 29′ 36″	97° 29′ 36″

IV. Zusammengesetzte Aufgaben.

50) Auf dem einen Schenkel des Winkels α trage man vom Scheitel aus das Stück a ab; dieses Stück projicire man auf den zweiten Schenkel, die Projection wieder auf den ersten Schenkel, und denke sich diese Art des Projicirens bis ins Unendliche fortgesetzt. Die Summe S aller Projectionen, ferner die Summe S′ aller projicirenden Linien zu bestimmen.

51) Von einem Dreiecke sind gegeben die drei Winkel α, β, γ und die zu c gehörende Höhe h. Die Seite c zu bestimmen.

52) Von einem Dreiecke sind gegeben die drei Winkel α, β, γ und die Differenz $a - b = d$. Die Seite b zu bestimmen.

53) Von einem Dreiecke ist gegeben $a - b = d$, ferner c und β. Die Seite b zu bestimmen.

54) Von einem Dreiecke ist gegeben $a - b = d$, ferner c und γ. Die Seite b zu bestimmen.

55) Von einem Dreiecke ist gegeben $a - b = d$, ferner c und $\alpha - \beta = \delta$. Den Winkel β zu bestimmen.

56) Von einem Dreiecke ist gegeben $a + b = s$, ferner c und γ. Die Seite a zu bestimmen.

57) Von einem Dreiecke ist gegeben $a + b = s$, ferner c und β. Die Seite a zu bestimmen.

58) Von einem Dreiecke ist gegeben $a + b = s$, ferner γ und die Differenz d der Projectionen von a und b auf c. Den Winkel β und die Seiten a und b zu bestimmen.

59) Von einem Dreiecke ist gegeben $a + b = s$, ferner γ und die zur Seite c gehörende Höhe h. Die Seiten a und c zu bestimmen.

60) Von einem Dreiecke sind gegeben der Winkel γ und die beiden Stücke m und n, in welche die Seite c durch ihre zugehörige Höhe zerlegt wird. Den Winkel α zu bestimmen.

61) Von einem Dreiecke sind c, γ und der Inhalt J gegeben. Die Seiten a und b zu bestimmen.

62) Von einem Dreiecke ist gegeben der Umfang u, der Winkel α und der Inhalt J. Die Seiten a, b, c zu bestimmen.

63) Von einem Dreiecke ist die Seite c gegeben, ferner die Linie e, welche die Mitte von c mit der Gegenecke verbindet, ferner die Differenz $\alpha - \beta = \delta$. Die Seiten a, b und die Winkel α, β zu bestimmen.

64) Von einem Dreiecke ist die Seite c gegeben, ferner ihr Gegenwinkel γ, ferner die bis zur Gegenseite verlängerte Halbirungslinie e dieses Winkels. Die Winkel α, β und die Seiten a, b zu bestimmen.

65) Von einem Dreiecke ist die Seite c gegeben, ferner die zugehörige Höhe h und der von den beiden anderen Höhen gebildete spitze Winkel ε. Die Winkel α, β und die Seiten a, b zu bestimmen.

66) Es ist der Winkel $ABC = \alpha$ gegeben, ferner innerhalb der Winkelebene der Punkt D durch die Linie $DB = a$ und den Winkel $DBC = \beta$. Im Schenkel BC den Mittelpunkt M eines Kreises zu bestimmen, welcher AB berührt und durch den Punkt D geht.

67) Von einem Vierecke kennt man die beiden Diagonalen m und n und den Winkel α, den dieselben bilden. Den Inhalt J zu bestimmen.

68) Von einem Parallelogramme kennt man die eine Diagonale m, den Umfang u und den Inhalt J. Die Seiten und Winkel desselben zu bestimmen.

69) Von einem eingeschriebenen Vierecke kennt man die Seiten a, b, c, d. Die Winkel desselben zu bestimmen.*)

70) Von einem Vierecke kennt man die vier Seiten a, b, c, d und den Inhalt J. Die Winkel desselben zu bestimmen.

71) Vier auf freiem Felde in gerader Linie liegende Gegenstände A, B, C, D sind von E aus sichtbar. Man kennt $AB = a$, $CD = b$, ferner $\measuredangle AEB = \alpha$, $\measuredangle CED = \beta$, $\measuredangle BEC = \gamma$. Die Entfernung BC zu bestimmen.

---

*) Die Bestimmung der Diagonalen findet sich im 2ten Theile, §. 174.

Auflösungen.

50) $S = \frac{a \cos \alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha} = a \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{ctg} \alpha$; $S' = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha} = a \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha$;

51) $c = h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = h \sin(\alpha + \beta) : \sin \alpha \sin \beta$;

52) $b = \frac{d \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{d \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$;

53) $b = \frac{c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta}{2c \cos \beta - 2d}$;

54) $b = -\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + (c^2 - d^2) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}\gamma}$;*)

55) β wird erhalten aus der Gleichung $d \,.\, \sin(\beta + \frac{1}{2}\delta) = c \,.\, \sin \frac{1}{2}\delta$;

56) $a = \frac{1}{2}s \mp \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - (s^2 - c^2) \sec^2 \frac{1}{2}\gamma}$;

57) $a = \frac{(s + c)(s - c)}{2(s - c \cos \beta)}$;

58) β findet man aus der Gleichung: $\cos(\beta + \frac{1}{2}\gamma) = (d \,.\, \cos \frac{1}{2}\gamma) : s$. Alsdann ist $a = \frac{s \,.\, \sin(\beta + \gamma)}{2 \sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma) \cos \frac{1}{2}\gamma}$, ferner $b = \frac{s \,.\, \sin \beta}{2 \cos(\beta + \frac{1}{2}\gamma) \cos \frac{1}{2}\gamma}$;

59) $a = \frac{1}{2}s \mp \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - 4ch \operatorname{cosec} \gamma}$;

$c = -h \,.\, \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma \mp \sqrt{s^2 + h^2 \,.\, \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\gamma}$;

60) α wird erhalten aus den Gleichungen $\alpha + \beta = 2R - \gamma$ und

$\sin(\alpha - \beta) = (m - n) \,.\, \sin \gamma : (m + n)$;

61) a und b werden erhalten aus den Gleichungen

$a + b = \sqrt{c^2 + 4J \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma}$ und $a - b = \sqrt{c^2 - 4J \operatorname{tg} \frac{1}{2}}$;

62) $a = \frac{1}{2}u - \frac{2 J \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha}{u}$; b und c erhält man aus den Gleichungen:

$b + c = u - a$; $b \,.\, c = 2J : \sin \alpha$.

63) Bezeichnet man den Winkel, welchen e und c bilden, durch v, so erhält man v aus der Gleichung: $\sin(2v + \delta) = \frac{c^2 \sin \delta}{4 e^2}$; die gesuchten Winkel und Seiten erhält man aber, wenn v bekannt ist, nach der in §. 40 gegebenen Lösung.

---

*) Die in 54, 56, 59 gegebenen Lösungen lassen sich auf eine bequemere Form bringen. Setzt man z. B. in 59 in dem für c gefundenen Ausdrucke $h \,.\, \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma : s = \operatorname{ctg} \varepsilon$, so ist $c = -s \,.\, \operatorname{ctg} \varepsilon \mp s\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varepsilon} = -s(\operatorname{ctg} \varepsilon \mp \operatorname{cosec} \varepsilon)$, daher entweder $c = -s \,.\, \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\varepsilon$, oder $c = s \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varepsilon$. In ähnlicher Art lassen sich bei den anderen erwähnten Arten die Lösungen umformen.

64) Bezeichnet man den Winkel, welchen e und c bilden, durch v, so erhält man v aus der Gleichung: $\sin v = \frac{e \sin\gamma \mp \sqrt{e^2 \sin^2\gamma + 4c^2 \sin^2 \frac{1}{2}\gamma}}{2c}$. Alsdann ist $\alpha = v - \frac{1}{2}\gamma$; $\beta = 180^0 - (v + \frac{1}{2}\gamma)$; $a = \frac{e \sin v}{\sin\beta}$; $b = \frac{e \sin v}{\sin\alpha}$.

65) Bezeichnet man den Winkel, welchen die zu c und a gehörenden Höhen bilden, durch v, so erhält man v aus der Gleichung: $\cos(\varepsilon + 2v) = \frac{c . \cos\varepsilon - 2h \sin\varepsilon}{c}$. Alsdann ist $\beta = v$; $\alpha = 180^0 - (v + \varepsilon)$; $a = h : \sin\beta$; $b = h : \sin\alpha$.

66) $BM = a . \frac{\cos\beta \mp \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\cos^2\alpha}$;

67) $J = \frac{1}{2} m n \sin\alpha$;

68) Ist v der Winkel, den die Diagonale nicht theilt, so ist $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} v = \frac{(u+2m)(u-2m)}{8J}$. Die Seiten a und b erhält man beide durch die Gleichung $\left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4}u^2 - \frac{4J}{\sin v}} \right\}$.

69) Bezeichnet v den Winkel, den a und b einschließen, so ist $\cos v = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$.

70) Bezeichnet v den Winkel, den a und b, ferner w den Winkel, den c und d bilden, bezeichnet man ferner $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$ durch e, $(4J^2 + e^2 + c^2d^2 - a^2b^2) : 4cd$ durch f, so ist $\sin w - \frac{e}{2J} \cos w = \frac{f}{J}$, oder, wenn $(e : 2J) = \operatorname{tg}\varepsilon$ gesetzt wird, $\sin(w - \varepsilon) = (f . \cos\varepsilon) : J$. Ferner ist alsdann $\sin v = (2J - cd \sin w) : ab$. Die noch unbekannten zwei Winkel sind jetzt leicht zu ermitteln.

71) $BC = \frac{1}{2}(a + b) \operatorname{tg} v \operatorname{tg} \frac{1}{2} v$, wobei $\operatorname{tg} v = \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{ab \sin\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \sin\beta}}$ ist.

Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,

Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium zu Parchim.

Vierter Theil.

Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Zweite unveränderte Auflage.

Dessau.

Verlag von A. Desbarats.

1867.

Vorwort.

Der vorliegende vierte Band, mit welchem der Verfasser sein Lehrbuch der Mathematik abschließt, enthält die Stereometrie und sphärische Trigonometrie, setzt also die Kenntniß der Planimetrie und ebenen Trigonometrie voraus. Da indessen stereometrische Aufgaben nur in wenigen Fällen mit Hülfe der Trigonometrie gelöst worden sind, und zwar nur dann, wenn eine Entwicklung auf anderem Wege ihrer Unbequemlichkeit wegen sich für den Unterricht nicht zu eignen schien, so ist dieser Band, bei Ausschluß der sphärischen Trigonometrie, auch als unmittelbare Fortsetzung der Planimetrie zu benutzen, wobei die erwähnten Aufgaben ohne weitere Störung des Zusammenhanges vorläufig überschlagen werden können.

Die in den früheren Bänden gegebenen einleitenden Bemerkungen enthalten bereits im Wesentlichen eine Darlegung des Planes, welcher dem Lehrbuche zu Grunde liegt, so daß nur in Bezug auf diesen vierten Band noch Einiges hinzuzufügen ist.

Die Capiteleintheilung ist fast unmittelbar durch den zu behandelnden Stoff gegeben und ist deshalb in den meisten Lehrbüchern die nämliche. Die weitere Bearbeitung kann indessen eine sehr verschiedene sein. Will man der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie eine besondere Schwierigkeit zugestehen, so beruht dies hauptsächlich darauf, daß die Verhältnisse im Raume verwickelter sind, als in der Ebene, und daß außerdem die Figuren nur einen schwachen Anhalt bieten, wenn nicht die Phantasie im Stande ist, aus dem perspectivischen Bilde eines Körpers sich dessen wahre Form herzustellen. Zwar ist Letzteres eine Aufgabe, in der sich unbewußt ein Jeder von Jugend auf übt, aber die so gewonnene Fertigkeit beschränkt sich meistens auf

die einfachsten Fälle. Der Verfasser hat daher gesucht, alle Betrachtungen, bei denen drei Dimensionen zu berücksichtigen waren, möglichst eingehend zu halten, während es ihm hingegen ausreichend erschien, bei Aufgaben planimetrischer Natur statt ausführlicher Entwicklungen nur Andeutungen zu geben. Eine eingehendere Behandlung des Körperlichen ist aber nicht blos durch die größere Schwierigkeit des Stoffes bedingt, es soll dadurch auch ein Hauptzweck des stereometrischen Unterrichts erreicht werden, die klare Anschauung räumlicher Beziehungen. Dieselbe ist oft in weit geringerem Grade vorhanden, als man anzunehmen geneigt ist. Der Anfänger wird noch gar zu leicht in einem sphärischen Dreiecke ein ebenes erblicken, dessen Winkelsumme zwei Rechte beträgt, und Mancher, der in der Berechnung sphärischer Dreiecke eine hinreichende Fertigkeit besitzt, ist nicht im Stande, sich ein sphärisches oder körperliches Dreieck vorzustellen, welches einen spitzen, einen rechten und einen stumpfen Winkel enthält. — Durch das Gesagte ist im Allgemeinen der Plan angedeutet, den der Verfasser vor Augen hatte, wie es auch die Erklärung giebt für manche anscheinend zu große Ausführlichkeit.

In Betreff des Einzelnen ist noch Folgendes zu bemerken. Nachdem bereits von congruenten körperlichen Ecken gesprochen worden ist, folgt nachträglich noch einmal die Definition der Congruenz; es ist jedoch leicht zu sehen, daß es nur in Rücksicht auf das Spätere geschehen ist. — Der Begriff des unendlich Kleinen hat nicht überall vermieden werden können, ist aber nicht in solchen Fällen benutzt worden, wo andere Wege offen standen. Obwohl also z. B. die Untersuchung über die Gleichheit pyramidaler Körper eigentlich nur eine Umschreibung des Cavalieri'schen Grundsatzes ist, und dieser daher consequenter Weise hätte an die Spitze des Capitels über Inhaltsbestimmungen der Körper gesetzt werden können, so hat es der Verfasser doch vorgezogen, die Gleichheit prismatischer Körper streng aus dem Begriffe der Congruenz abzuleiten.

Parchim, März 1862.

H. Gerlach.

Inhalt.

Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Berichtigungen.

Seite 16 Zeile 16 und 20 lies Parallelepipedum statt Parallelipipedum.
Seite 36 Zeile 6 lies $xa = xb = r$ statt $xa = xb = v$; ferner $< mcx = \frac{1}{2}v$ statt $< mcx = \frac{1}{2}r$.

Stereometrie

und

sphärische Trigonometrie.

Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Von der Lage der Linien und Ebenen.

§. 1. Erklärung.

Eine Fläche heißt Ebene, wenn die geraden Verbindungslinien je zweier Punkte derselben vollständig mit der Fläche zusammenfallen. Auf einer unbegränzten Ebene läßt sich daher eine gerade Linie nach jeder Richtung hin so fortbewegt denken, daß sie mit allen ihren Punkten immer in der Ebene bleibt, und umgekehrt entsteht eine Ebene, wenn man auf den Schenkeln eines Winkels eine gerade Linie so fortschiebt, daß sie stets beide Schenkel schneidet. Eine Ebene ist also ihrer Lage nach bestimmt durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte. Sind mehr als drei Punkte gegeben, so liegen sie nicht nothwendig in einer Ebene. Sind nur zwei Punkte gegeben, so können dieselben in unendlich vielen Ebenen liegen; alle diese Ebenen haben dann die gerade Verbindungslinie der zwei Punkte gemeinschaftlich und werden ihrer Lage nach erhalten, wenn man eine derselben um diese Linie gedrehet denkt.

§. 2. Erklärung.

Hat eine Linie*) zwei Punkte mit einer Ebene gemeinschaftlich, so fällt sie vollständig mit derselben zusammen. Die Ebene geht alsdann

*) Unter der einfachen Bezeichnung Linie ist von jetzt an stets eine gerade Linie zu verstehen.

durch die Linie oder ist durch dieselbe hindurchgelegt. Ist nur ein gemeinschaftlicher Punkt vorhanden, so wird die Ebene in diesem Punkte von der Linie getroffen, oder geschnitten, je nachdem die Linie von der Ebene begränzt wird, oder nicht; ist kein Punkt beiden gemeinschaftlich, auch wenn sie unbegränzt gedacht werden, so ist die Linie der Ebene parallel.

Haben zwei Linien auch bei beliebiger Verlängerung keinen Punkt gemeinschaftlich, so heißen sie nur dann parallel, wenn sie zugleich in derselben Ebene liegen, und heißen windschief, wenn sich keine Ebene durch beide Linien hindurchlegen läßt, also in den Richtungen überhaupt keine Uebereinstimmung stattfindet. Durch zwei parallele Linien ist daher eine Ebene ebenfalls bestimmt, und durch einen gegebenen Punkt kann nur eine einzige Linie parallel mit einer gegebenen gezogen werden.

Haben zwei Ebenen drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemeinschaftlich, so fallen sie vollständig zusammen; haben sie zwei Punkte gemeinschaftlich, so schneiden sie sich in der geraden Verbindungslinie dieser Punkte, welche in beiden Ebenen liegen muß; ist kein Punkt beiden gemeinschaftlich, so sind sie parallel.

§. 3. Lehrsätze.

1) Eine Linie a ist parallel mit einer Ebene A, wenn sie mit einer einzigen in dieser Ebene liegenden Linie b parallel ist.

2) Ist eine Linie a parallel mit einer Ebene A, und legt man durch a hindurch beliebig viele Ebenen, von welchen A in den Linien b, c, d u. s. w. geschnitten wird, so sind diese Linien b, c, d u. s. w. mit a und auch unter einander parallel.

3) Sind zwei Linien einer dritten parallel, so sind sie auch untereinander parallel.

Beweis zu 1). Legt man durch die parallelen Linien a und b eine Ebene, so müßte ein Punkt, den a und A gemeinschaftlich hätten, in dieser Ebene liegen. Alsdann wäre er aber ein gemeinschaftlicher Punkt für die Linien a und b, und dies ist nicht möglich, da a $\parallel$ b ist.

Beweis zu 2). Die Linien b und c u. s. w. sind parallel mit a, weil sie mit a keinen Punkt gemeinschaftlich haben können, und weil außerdem jede dieser Linien mit a in einer Ebene liegt. Sie sind aber auch untereinander parallel, weil sie in derselben Ebene A liegen, und weil die schneidenden Ebenen, in denen sie ebenfalls liegen, keinen Punkt außerhalb der Linie a gemeinschaftlich haben können.

Beweis zu 3). Er folgt aus 2). Ist nämlich b $\parallel$ a, und wird c parallel mit b gezogen, so ist auch c $\parallel$ a.

§. 4. Lehrsätze.

1) Zwei Ebenen A und B sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien (a und b) der einen Ebene (A) parallel der anderen Ebene sind.

2) Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien der einen Ebene parallel sind zweien sich schneidenden Linien der anderen.

Beweis zu 1). Gäbe es eine Schneidungslinie c, so müßte diese in beiden Ebenen liegen, dürfte jedoch weder a noch b schneiden. Da sie aber mit a und b in einer Ebene liegen würde, und diese Linien sich schneiden, so könnte sie höchstens der einen parallel sein. Es giebt daher keine Schneidungslinie.

Beweis zu 2). Er folgt unmittelbar aus 1) dieses §. und aus 1) des §. 3.

§. 5. Zusatz.

Aus den §§. 3 und 4 ergeben sich leicht noch folgende Sätze:

1) Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann man unendlich viele Linien parallel mit der Ebene ziehen. Diese Linien liegen sämmtlich in einer Ebene, welche ersterer parallel ist.

2) Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann man nur eine einzige Ebene parallel mit ersterer legen.

3) Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten Ebene in parallelen Linien durchschnitten.

4) Schneiden sich zwei Ebenen, so können nicht zwei sich schneidende Linien der einen parallel mit zwei sich schneidenden Linien der andern sein.

5) Parallele Linien zwischen zwei parallelen Ebenen sind einander gleich.

6) Errichtet man auf einer Ebene A drei und mehr gleich große und parallele Linien, die aber nicht sämmtlich in derselben Ebene liegen, so liegen die andern Endpunkte derselben in einer mit A parallelen Ebene.

7) Werden drei (und mehr) parallele Ebenen von verschiedenen Linien durchschnitten, die in dem nämlichen Punkte x außerhalb der Ebenen zusammentreffen, und werden die von den einzelnen Linien gebildeten Durchschnittspunkte durch $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ u. s. w. bezeichnet, so gelten folgende Proportionen:

1) $xa : aa' : a'a'' = xb : bb' : b'b'' = xc : cc' : c'c''$ u. s. w.

2) $ab : a'b' : a''b'' = bc : b'c' : b''c''$ u. s. w. $= xa : xa' : xa''$.

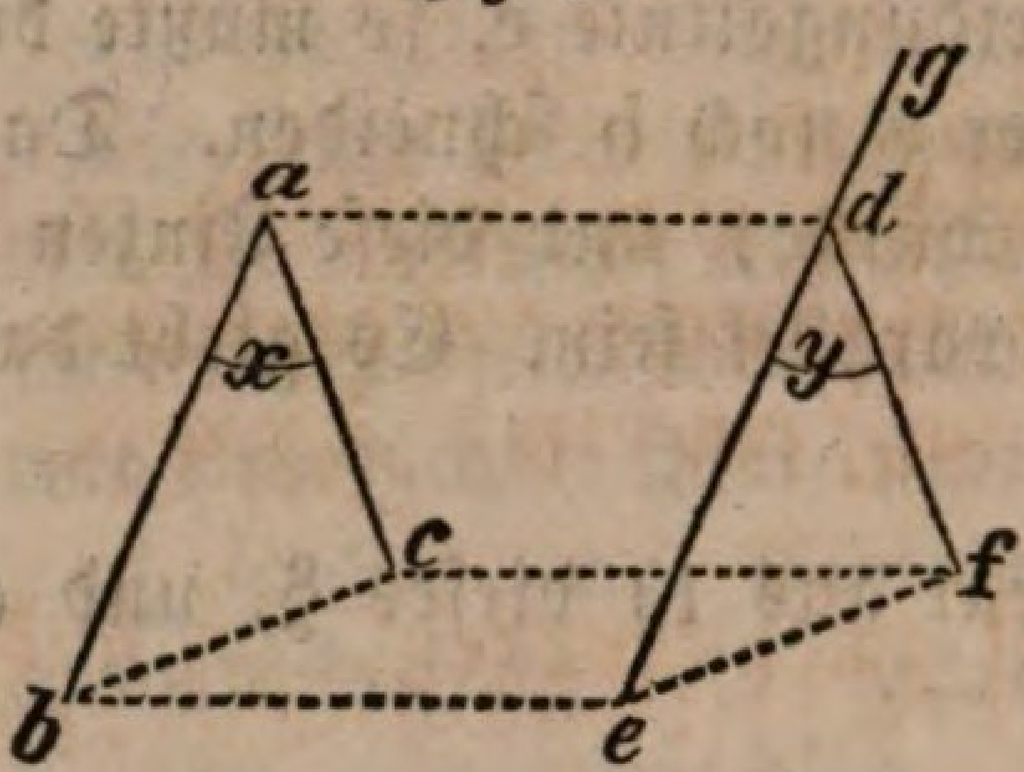
Treffen die Linien nicht in demselben Punkte x zusammen, so gilt nur die eine Proportion:

$$aa' : a'a'' = bb' : b'b'' = cc' : c'c'' \text{ u. s. w.}$$

§. 6. Lehrsatz.

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, haben gleiche Größe, oder sie sind Supplementwinkel.

Fig. 1.



Beweis. Giebt man (Fig. 1.) den parallelen Schenkeln gleiche Größe, ist also ab = de, ac = df, so sind abde und acdf Parallelogramme. Daraus folgt ad = be = cf, und ad ∥ be ∥ cf. Ist aber be = cf und auch be ∥ cf, so ist becf ebenfalls ein Parallelogramm, und es ist bc = ef. Aus ab = de, ac = df, bc = ef folgt nun, daß △ abc ≅ △ def, und daß x = y ist.

Der zweite Theil der Behauptung ergiebt sich daraus, daß die Schenkel des Winkels gdf, der das Supplement von y ist, ebenfalls mit den Schenkeln des Winkels x parallel sind, wenn dies für die Schenkel des Winkels y vorausgesetzt ist.

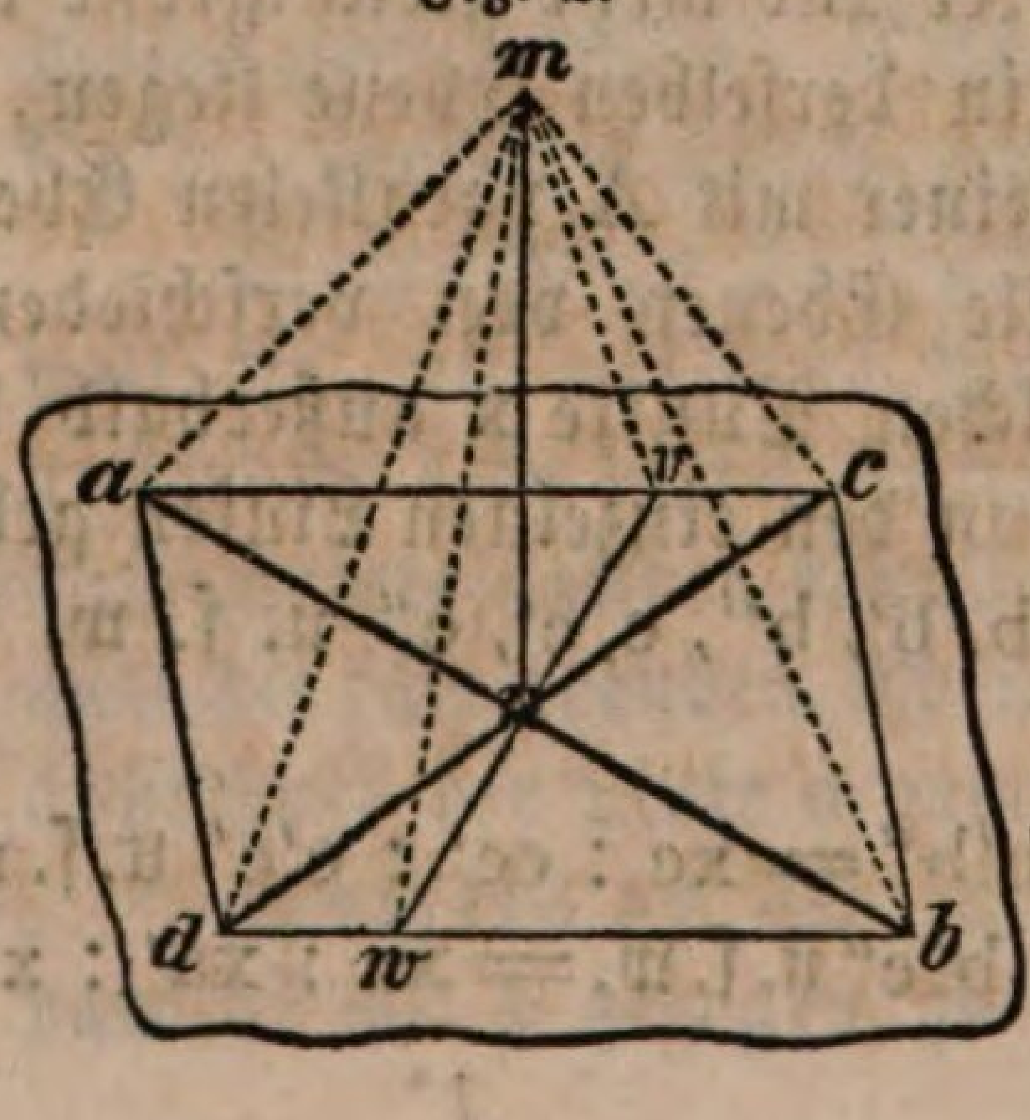
§. 7. Erklärung.

Wird eine Ebene von einer Linie geschnitten, so bildet letztere mit den verschiedenen Linien, die man in der Ebene nach dem Schneidungspunkte ziehen kann, im Allgemeinen verschiedene Winkel. Den kleinsten dieser Winkel nennt man den Neigungswinkel der Linie. Sind alle diese Winkel einander gleich, folglich jeder gleich einem Rechten, so steht die Linie senkrecht auf der Ebene.

§. 8. Lehrsatz.

Eine Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf zwei in der Ebene liegenden Linien senkrecht steht.

Fig. 2.



Beweis. Es stehe (Fig. 2.) mn senkrecht auf ab und cd, und es sei an = nb, cn = nd gemacht, so daß acdb ein Parallelogramm ist. Alsdann ist △ mnc ≅ △ mnd, folglich mc = md, ferner △ mna ≅ △ mnb, folglich ma = mb. Aus mc = md, ma = mb, ca = db folgt aber, daß △ mca ≅ △ mdb ist.

Zieht man nun im Parallelogramm acdb die gerade Linie vnw, so ist vn = wn; außerdem ist cv = dw, also auch △ mcv ≅ △ mdw, daher mv = mw. Aus mv = mw, vn = wn, mn = mn ergiebt sich aber, daß △ mnv ≅ △ mnw ist, und daß also mn auf der in der Ebene acdb beliebig gezogenen Linie vnw senkrecht steht.

Anm. Es ergiebt sich ohne Weiteres, daß im Punkte n nur die einzige Linie mn senkrecht auf der Ebene acdb stehen kann.

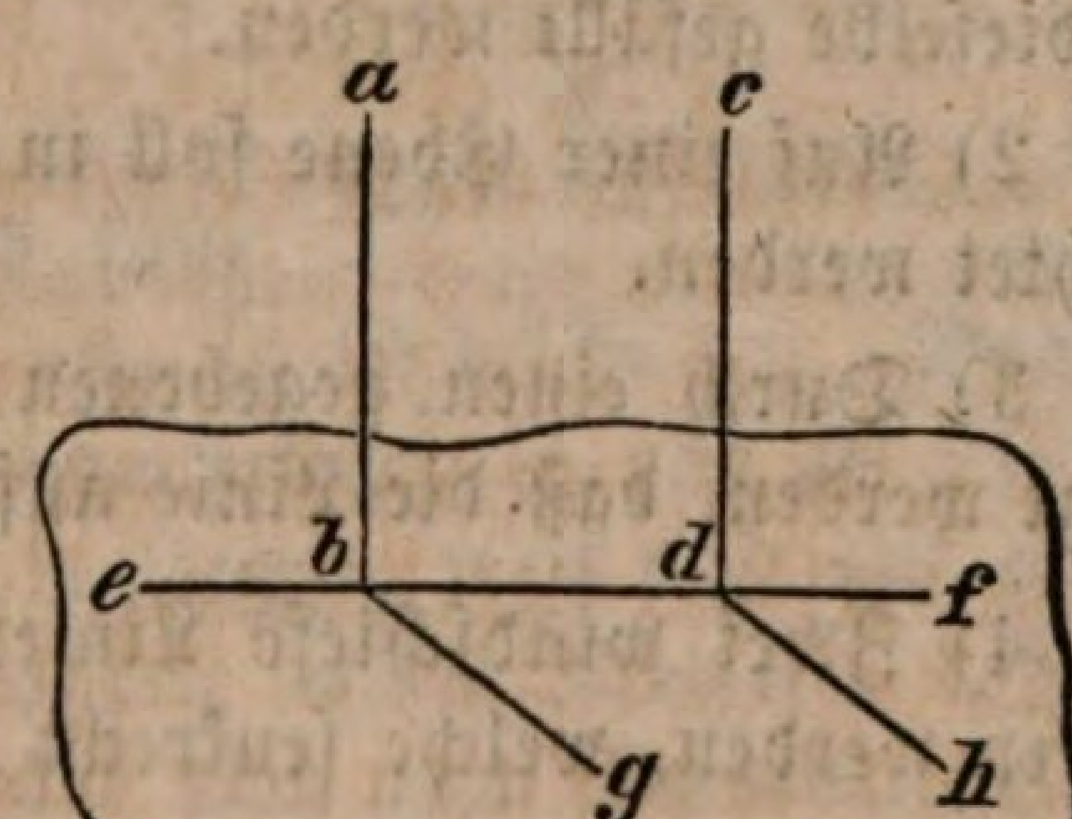
§. 9. Lehrsätze.

1) Steht von zwei parallelen Linien die eine senkrecht auf einer Ebene, so steht die andere ebenfalls senkrecht auf derselben.

2) Stehen zwei Linien senkrecht auf ein und derselben Ebene, so sind sie einander parallel.

3) Steht eine Linie a senkrecht auf zwei Ebenen, so sind diese einander parallel.

Fig. 3.



Beweis zu 1). Es stehe ab (Fig. 3.) senkrecht auf der Ebene, und es sei cd || ab. Alsdann ist ∠ abd = ∠ cdf = R. Zieht man nun in derselben Ebene aus b die beliebige Linie bg, ferner dh || bg, so ist (nach §. 6.) ∠ cdh = ∠ abg = R. Es steht also cd senkrecht auf ef und auf dh, folglich senkrecht auf der Ebene.

Beweis zu 2). Sind (Fig. 3.) ab und cd zwei auf der Ebene senkrecht stehende Linien, so müßte, wenn cd nicht parallel ab wäre, aus d eine Linie gezogen werden können parallel mit ba, und diese Linie müßte nach 1) im Punkte d ebenfalls senkrecht auf der Ebene stehen. Dies ist aber (§. 8, Anm.) nicht möglich, und es kann daher die aus dem Punkte d parallel mit ba gezogene Linie keine andere als dc sein.

Beweis zu 3). Legt man durch a beliebige Ebenen, von welchen die beiden anderen Ebenen geschnitten werden, so stehen alle Schneidungslinien senkrecht auf a, und je zwei derselben sind also parallel. Hieraus folgt aber (§. 4, 2), daß die durchschnittenen Ebenen parallel sind.

§. 10. Zusatz.

An die Sätze der §§. 8 und 9 schließen sich leicht noch folgende Sätze an:

1) Eine Senkrechte ist die kürzeste Verbindungslinie (Entfernung, Abstand) zwischen einer Ebene und einem außerhalb derselben liegenden Punkte.

2) Errichtet man im Mittelpunkte eines Kreises eine Linie senkrecht auf der Kreisebene, so steht jeder Punkt dieser Linie gleichweit von allen Punkten der Peripherie ab.

3) Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Ebene beliebig viele Linien von gleicher Länge nach derselben, so liegen die Treffpunkte in einer Kreislinie. Verbindet man den Mittelpunkt des Kreises mit dem gegebenen Punkte, so steht diese Linie senkrecht auf der Ebene.

4) Parallele Ebenen haben überall gleichen Abstand.

Anm. Die Beweise ergeben sich aus bekannten planimetrischen Sätzen.

§. 11. Aufgaben.

1) Von einem Punkte außerhalb einer Ebene soll eine Senkrechte auf dieselbe gefällt werden.

2) Auf einer Ebene soll in einem gegebenen Punkte eine Senkrechte errichtet werden.

3) Durch einen gegebenen Punkt einer Linie a soll eine Ebene so gelegt werden, daß die Linie auf ihr senkrecht steht.

4) Zwei windschiefe Linien a und b sollen durch eine Linie verbunden werden, welche senkrecht auf beiden steht.

Auflösung zu 1). Man bestimme in der Ebene drei Punkte, welche von dem gegebenen gleiche Abstände haben. Der Mittelpunkt des Kreises, den man um die drei Punkte herum legen kann, ist dann der gesuchte Fußpunkt. Der Beweis folgt aus §. 10, 3).

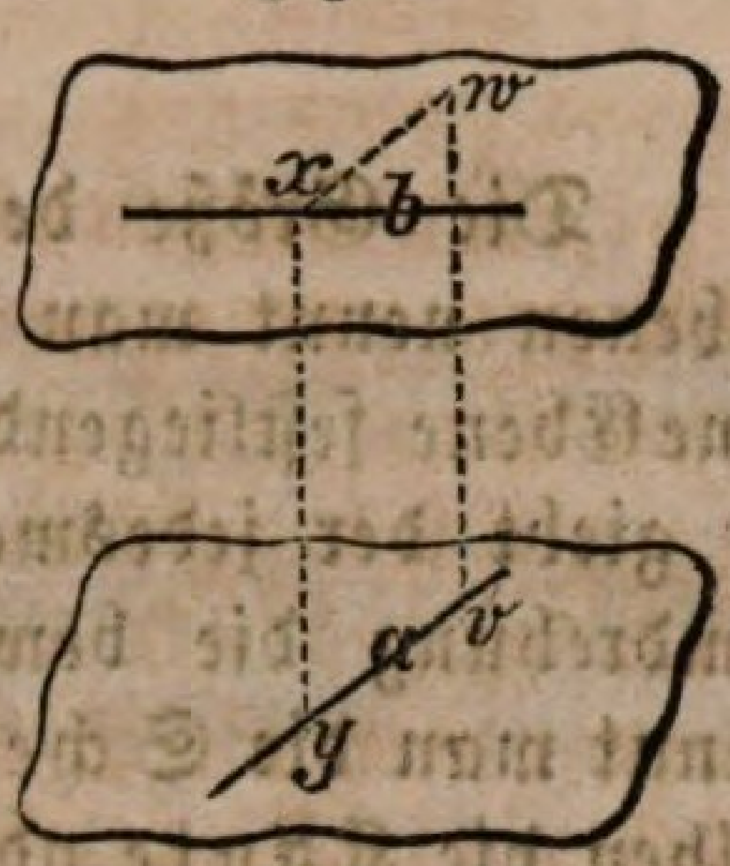
Auflösung zu 2). Von einem beliebigen, außerhalb der Ebene liegenden Punkte fälle man eine Senkrechte auf dieselbe (nach 1) und ziehe dann aus dem gegebenen Punkte eine Linie parallel mit der erhaltenen Senkrechten.

Auflösung zu 3). Man lege durch a zwei Ebenen und construire in jeder eine Linie, die in dem gegebenen Punkte senkrecht auf a steht. Durch die beiden Senkrechten ist alsdann die gesuchte Ebene bestimmt.

Auflösung zu 4). Man lege (Fig. 4.) durch a und b zwei parallele Ebenen, indem man an a eine Linie parallel mit b, und an b eine Linie parallel mit a zieht. Dann errichte man auf einem beliebigen

Punkte v in der Linie a die Senkrechte vw und ziehe in der andern Ebene die Linie wx parallel mit a. Zieht man nun xy parallel mit wv, so ist xy die gesuchte Linie. Diese ist zugleich die kürzeste Verbindungslinie zwischen a und b. Der Beweis ergiebt sich ohne Schwierigkeit aus der Figur.

Fig. 4.

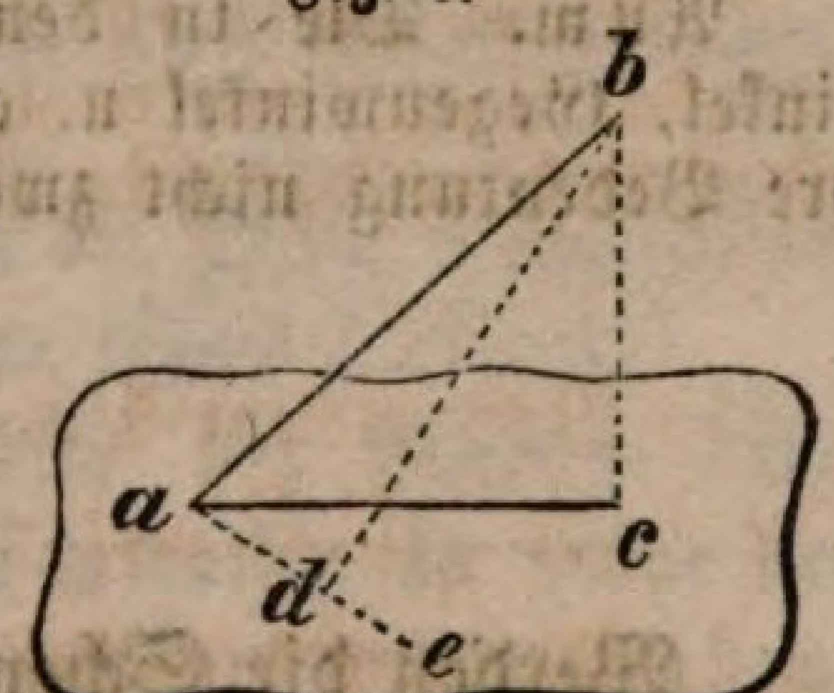


§. 12. Aufgabe.

Es soll der Neigungswinkel einer Linie gegen eine Ebene bestimmt werden.

Auflösung. Es sei ba (Fig. 5.) ein beliebiges Stück der Linie, a der Treffpunkt. Fällt man aus b die Senkrechte bc nach der Ebene und verbindet c mit a, so ist $\angle$bac unter allen hier möglichen Winkeln der kleinste, ist folglich der Neigungswinkel.

Fig. 5.



Beweis 1. Zieht man aus a die beliebige Linie ae in der gegebenen Ebene, und fällt man ferner aus b die Senkrechte bd auf ae, so ist bd $>$ bc. Denkt man sich nun $\triangle$ bad in die Ebene des $\triangle$ bac gelegt, so daß die Linie ba beiden Dreiecken gemeinschaftlich bleibt, so liegen, weil adb und acb rechte Winkel sind, d und c in der Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser ba ist. In diesem Kreise gehört aber zum Peripheriewinkel bac eine kleinere Sehne, als zum Peripheriewinkel bad, und folglich ist $\angle$bac der kleinere von beiden.

Beweis 2. Es ist (Fig. 5):

$$\sin bac = bc : ba,$$
$$\sin bad = bd : ba,$$
folglich $\sin bac < \sin bad$.

Zum kleineren Sinus gehört aber der kleinere Winkel.

§. 13. Zusatz.

Aus vorigem §. ergiebt sich unmittelbar:

1) Parallele Ebenen werden von ein und derselben Linie unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten.

2) Eine Ebene wird von parallelen Linien unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten.

Anm. Die Sätze dieses §. lassen sich nicht umkehren.

§. 14. Erklärung.

Die Größe der Neigung (Abweichung) zweier sich schneidenden Ebenen nennt man einen Flächenwinkel. Denkt man sich also die eine Ebene festliegend, die andere um die Schneidungslinie herumgedreht, so giebt der jedesmalige Flächenwinkel an, welchen Theil einer ganzen Umdrehung die bewegte Ebene zurückgelegt hat. Die beiden Ebenen nennt man die Schenkel des Flächenwinkels, die Schneidungslinie derselben die Kante oder Scheitellinie. Bei den Flächenwinkeln unterscheidet man genau ebenso, wie bei den ebenen Winkeln, erhabene, gestreckte, hohle Winkel u. s. w., und theilt den rechten Winkel ebenfalls in 90 Grade ein.

Anm. Die in den späteren §§. vorkommenden Ausdrücke: Scheitelwinkel, Gegenwinkel u. a. brauchen nicht noch einmal erklärt zu werden, da ihre Bedeutung nicht zweifelhaft sein kann.

§. 15. Erklärung.

Werden die Schenkel eines Flächenwinkels von einer Ebene durchschnitten, welche auf der Kante senkrecht steht, so bilden die beiden Schneidungslinien einen ebenen Winkel, den man den Neigungswinkel des Flächenwinkels nennt. Man construirt ihn, wenn man aus einem beliebigen Punkte der Kante je eine Senkrechte auf derselben in beiden Schenkelflächen errichtet. Construirt man in der angegebenen Art den Neigungswinkel an verschiedenen Punkten der Kante, so sind die Schenkel dieser Winkel einander parallel, die Winkel selbst also gleich, und es ergiebt sich daraus, daß ein Flächenwinkel nicht verschiedene Neigungswinkel haben kann, und daß ferner zu gleichen Flächenwinkeln auch gleiche Neigungswinkel gehören.

Denkt man sich den einen Schenkel eines Flächenwinkels ruhend, den andern um die Kante herumgedreht, so dreht sich zugleich auch der eine Schenkel des Neigungswinkels und beschreibt eine Ebene, welche senkrecht auf der Kante steht. Hat nun der bewegte Schenkel des Flächenwinkels einen bestimmten Theil einer ganzen Umdrehung zurückgelegt, so hat sich gleichzeitig der Schenkel des ebenen Winkels um denselben Theil einer Umdrehung fortbewegt. Die Größe eines Flächenwinkels kann folglich durch dieselbe Zahl bezeichnet werden, wie die Größe des zugehörigen Neigungswinkels, und man braucht also, um erstern zu kennen, nur letztern zu messen. Unter dem Winkel, den zwei Ebenen mit einander bilden, versteht man daher der Kürze wegen immer den Neigungswinkel.

§. 16. Zusatz.

An vorigen §. schließen sich folgende Sätze an:

1) Steht eine Linie a senkrecht auf einer Ebene A, so steht jede durch a hindurch gelegte Ebene senkrecht auf A.

2) Stehen zwei sich schneidende Ebenen senkrecht auf einer dritten, so steht die Schneidungslinie a jener zwei Ebenen senkrecht auf der dritten.

3) Stehen beliebig viele Ebenen, die sich in den Linien a, b, c u. s. w. schneiden, senkrecht auf einer Ebene, so sind die Linien a, b, c u. s. w. einander parallel.

4) Schneiden sich verschiedene Ebenen in Linien, die nicht mit einander parallel sind, so giebt es keine Ebene, die auf allen jenen Ebenen senkrecht stände.

Beweis zu 1). Er ergiebt sich daraus, daß die Linie a mit allen in A nach ihrem Fußpunkte gezogenen Linien rechte Winkel bildet.

Beweis zu 2). Errichtet man im Fußpunkte der Linie a eine Senkrechte auf der dritten Ebene, so muß diese Senkrechte in jeder der beiden anderen Ebenen liegen, weil beide senkrecht auf der dritten stehen. Da es aber für den vorliegenden Fall nicht zwei verschiedene Senkrechten geben kann, so muß die Schneidungslinie a der beiden Ebenen diese Senkrechte sein.

Beweis zu 3). Er folgt aus 2) und aus §. 9, 2).

Beweis zu 4). Er folgt aus 2) und 3).

§. 17. Zusatz.

Aus den §§. 15 und 16 ergeben sich für die Neigungswinkel noch folgende Sätze:

1) Die Schenkel eines Flächenwinkels stehen senkrecht auf der Ebene des Neigungswinkels.

2) Fällt man aus einem beliebigen Punkte in dem einen Schenkel eines Neigungswinkels eine Senkrechte nach dem gegenüberliegenden Schenkel des Flächenwinkels, so trifft diese Senkrechte den andern Schenkel des Neigungswinkels, oder seine Verlängerung.

3) Halbirt man einen Flächenwinkel, so steht jeder Punkt der halbirenden Ebene gleichweit von den Schenkeln des Flächenwinkels ab.

Beweis zu 1). Er folgt aus 1) des §. 16.

Beweis zu 2). Er folgt aus 1) dieses §.

Beweis zu 3). Er ergiebt sich sehr leicht durch Congruenz.

§. 18. Zusatz.

Schneiden sich mehrere Ebenen in ein und derselben Linie, oder in parallelen Linien, so läßt sich nach §. 16 eine Ebene A construiren, die auf allen jenen Ebenen senkrecht steht. Die Linien, in welchen A von diesen Ebenen geschnitten wird, bilden alsdann eine ebene Figur, deren Winkel sämmtlich Neigungswinkel sind, und es müssen also die Sätze, welche für diese ebenen Winkel gelten, auch für die zugehörigen Flächenwinkel richtig sein. Es sind dies folgende Sätze:

1) Jeder Flächenwinkel ist gleich seinem Scheitelwinkel.

2) Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchschnitten, und sind zwei Gegen- oder Wechselwinkel einander gleich, so sind auch die übrigen paarweise einander gleich; ferner betragen zwei innere, oder zwei äußere Winkel, die auf derselben Seite der durchschneidenden Ebene liegen, zusammen 2 R. Sind hingegen zwei der erwähnten Winkel ungleich, so sind es auch die übrigen, und die erwähnte Winkelsumme ist größer oder kleiner als 2 R.

§. 19. Zusatz.

Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchschnitten, so steht die Richtung der durchschnittenen Ebenen in Beziehung zur Größe der gebildeten Winkel, und es lassen sich nun dieselben Sätze aufstellen, die an entsprechender Stelle in der Planimetrie entwickelt worden sind. Da aber die Form der Lehrsätze wie auch der Beweise mit unbedeutenden Abänderungen dieselbe sein würde, so kann das Weitere hier übergangen werden. Die wichtigsten Sätze lassen sich in folgendem zusammenfassen:

Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchschnitten, so ist der äußere Gegenwinkel gleich dem innern, oder größer, oder kleiner als derselbe, je nachdem die durchschnittenen Ebenen parallel sind, oder auf der Seite der Gegenwinkel convergiren, oder divergiren. Ebenso findet das Umgekehrte statt.

Zweites Capitel.

Von den körperlichen Ecken.

§. 20. Erklärung.

Schneiden sich drei oder mehr Ebenen in Linien, die in einem Punkte zusammentreffen, so nennt man den von ihnen eingeschlossenen Raum eine körperliche Ecke. Dieselbe ist auf der einen Seite offen, auf den übrigen aber von ebenen Winkeln*) begränzt. Diese Winkel nennt man Seiten, und je nach ihrer Anzahl nennt man die Ecke ein körperliches Dreieck, Viereck u. s. w. Die von den Seiten gebildeten Flächenwinkel heißen einfach Winkel (W.); die Bedeutung der bei den Ecken gebräuchlichen Ausdrücke Spitze und Kante bedarf keiner Erklärung.

Anm. 1. Drei sich schneidende Ebenen, die sich nicht in parallelen Linien schneiden, schneiden sich stets in einem Punkte; bei vier und mehr Ebenen ist dies nicht nothwendig der Fall.

Anm. 2. Die Lehrsätze der folgenden §§. beschränken sich auf solche Ecken, deren Seiten und Winkel sämmtlich hohl sind. Die Betrachtung wird dadurch vereinfacht, und die gewonnenen Resultate lassen sich mit leicht zu findenden Abänderungen auf Ecken von beliebiger Form anwenden.

§. 21. Erklärung.

Setzt man die Seiten einer körperlichen Ecke über die Spitze hinaus fort, so entsteht eine neue Ecke, die Scheitelecke der erstern. Beide Ecken haben dieselben Seiten und Winkel, aber in umgekehrter Ordnung, so daß man sich die eine Ecke nicht in die andere hineingeschoben denken kann, und daß also beide Ecken trotz der Uebereinstimmung von Seiten und Winkeln nicht congruent sind. Ecken dieser Art nennt man symmetrisch, auch wohl umgestülpt congruent (weil sie congruent werden, sobald man sich die eine wie einen Handschuh umgestülpt denkt).

Errichtet man in der Spitze einer körperlichen Ecke auf jeder Seite eine Senkrechte, so bilden diese Senkrechten wiederum eine Ecke, die Ergänzungs- oder Polarecke der andern. Wie sich aus dieser Construction ergiebt, stehen stets zwei Kanten der Polarecke senkrecht auf ein

---

*) Eigentlich von Ebenen, welche durch die Schenkel dieser Winkel bestimmt sind.

und derselben Kante der andern Ecke, und diese Kante steht also wiederum senkrecht auf derjenigen Seite der Polarecke, welche von jenen zwei Kanten begränzt wird. Jede Kante der einen Ecke steht daher senkrecht auf einer Seite der andern, und eine jede der beiden Ecken ist folglich die Polarecke der andern. Außerdem ergiebt sich noch, daß jede Seite den Flächenwinkel, auf dessen Kante sie senkrecht steht, zu 2 R ergänzen muß.

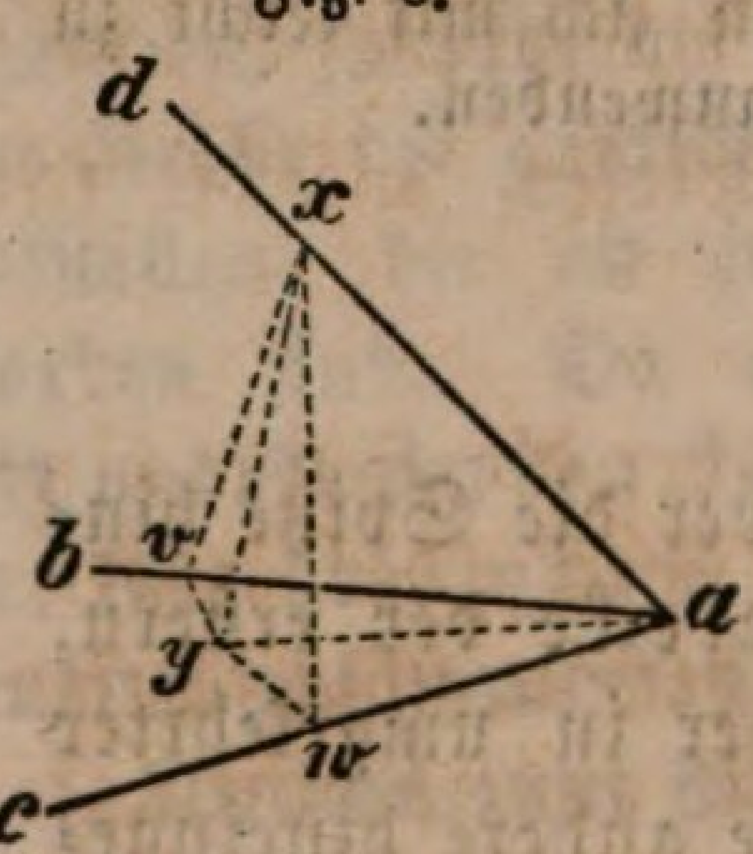
Anm. Denkt man sich aus irgend einem Punkte innerhalb einer Ecke Parallelen mit allen Kanten der Polarecke gezogen, so ist die so entstehende Ecke congruent mit der Polarecke, weil alle Seiten und Winkel beziehlich einander gleich sein müssen und in derselben Ordnung aufeinander folgen. Da nun die Kanten dieser Ecke ebenfalls senkrecht auf den Seiten der gegebenen Ecke stehen, so kann also die Polarecke auch erhalten werden, wenn man aus irgend einem Punkte innerhalb der gegebenen Ecke Senkrechten nach allen Seiten zieht.

§. 22. Lehrsätze.

1) In einem körperlichen Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt.

2) In einem körperlichen Dreiecke liegt der größern Seite der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt.

Fig. 6.



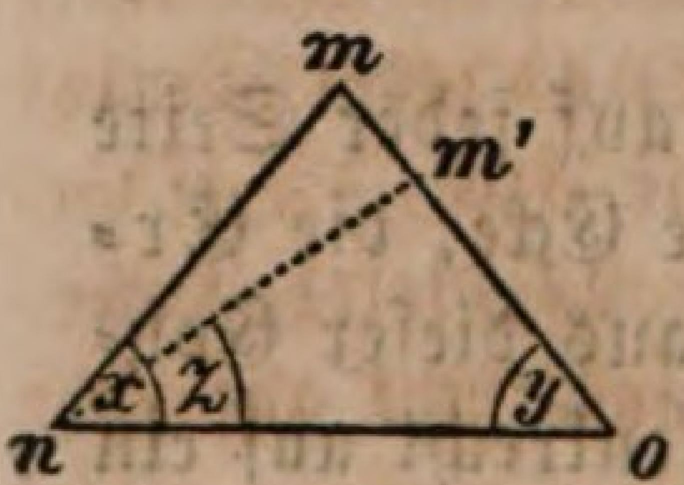
Beweis zu 1). Es sei (Fig. 6.) abcd das körperliche Dreieck, und es sei $\angle$ bad $=$ $\angle$ cad. Zieht man nun aus einem beliebigen Punkte x in der Kante ad die Senkrechten xv und xw nach ba und ca, ferner in der Ebene bac die Senkrechten vy und wy aus v und w, so sind W. xvy und W. xwy die beiden Neigungswinkel, welche der Behauptung zufolge gleich sein müssen.

Nun ergiebt sich aus der Construction:

$\triangle$xva $\cong$ $\triangle$xwa, also xv $=$ xw;

da ferner xy senkrecht auf der Ebene abc steht (§. 17, 1 und §. 16, 2), so ist $\triangle$xvy $\cong$ $\triangle$xwy, folglich W. xvy $=$ W. xwy.

Fig. 7.



Der Beweis für die Umkehrung ergiebt sich leicht indirect. Es sei (Fig. 7.) mno die Durchschnittsfigur, welche eine die drei Kanten durchschneidende Ebene bildet. Es sei W. x $=$ W. y, und es sei also zu beweisen, daß die durch die Linien mo und mn angedeuteten Seiten einander gleich sein müssen. Wären nun diese Seiten nicht gleich, wäre z. B. letztere größer, so müßte es eine durch die Spitze gehende und durch nm' angedeutete Ebene von solcher Lage geben, daß die durch m'n und

m'o angedeuteten Seiten einander gleich wären. Dann müßte aber auch W. y = W. z sein, was nicht möglich ist.

Beweis zu 2). Der Beweis für die erste Hälfte des Satzes schließt sich leicht an die Umkehrung von 1) an; die zweite Hälfte desselben wird indirect bewiesen, wie in der Planimetrie der entsprechende Satz.

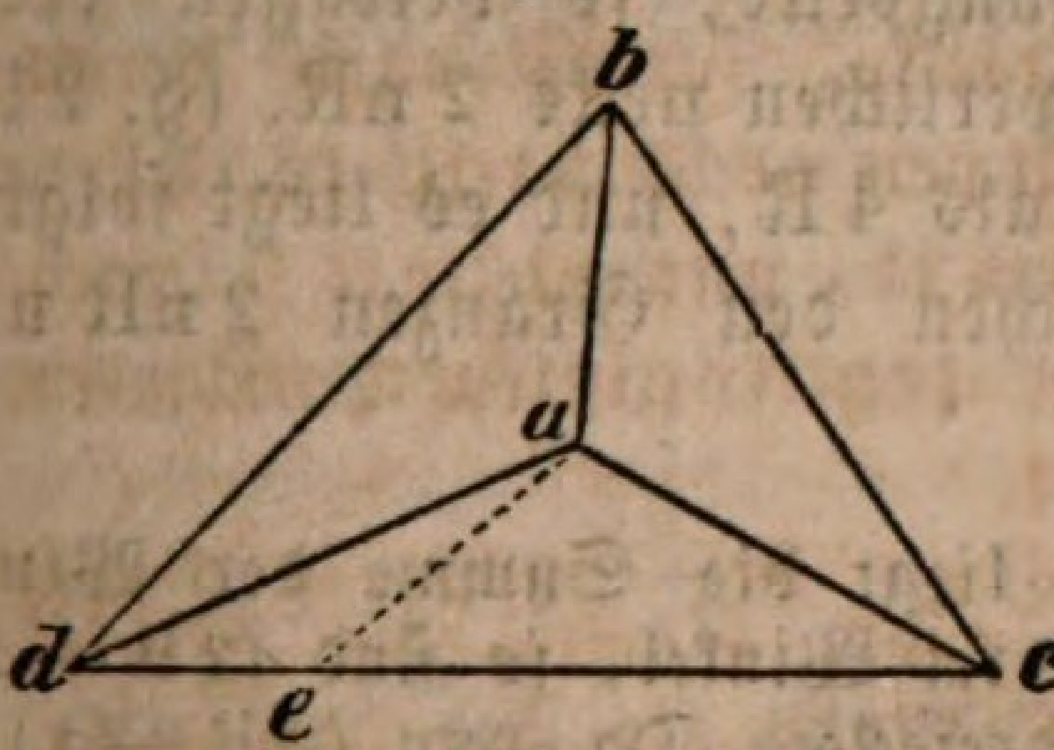
§. 23. Lehrsatz.

Die Summe zweier Seiten eines körperlichen Dreiecks ist größer als die dritte Seite, die Differenz derselben aber kleiner.

Vor. $\angle$ dac ist die größte der drei Seiten.

Beh. $\angle$ dac ist kleiner, als $\angle$ dab + $\angle$ bac.

Fig. 8.



Beweis. Man trage $\angle$ bac auf $\angle$ cad ab, und es sei $\angle$ cae der abgetragene Winkel. Macht man nun ab = ae und verbindet c mit b und e, so ist $\triangle$ cab $\cong$ $\triangle$ cae, also bc = ec. Verlängert man ferner ce über e hinaus bis d und verbindet d mit b, so ist bd + bc > de + ec, daher bd > de. In den beiden Dreiecken bad und ead hat man nun: ba = ea, da = da, bd > ed; folglich ist $\angle$ bad größer als $\angle$ ead, und hierdurch ist der Satz erwiesen.

Der zweite Theil des Satzes wird ebenso bewiesen, wie der entsprechende Satz in der Planimetrie.

§. 24. Lehrsatz.

Die Summe aller Seiten eines körperlichen necks, dessen Winkel sämmtlich hohl sind, ist kleiner als 4R.

Beweis. Wird das körperliche neck auf der offenen Seite durch ein ebenes neck begränzt, so ist es im Uebrigen von n Dreiecken eingeschlossen, deren Winkelsumme gleich 2nR ist. Nun stoßen in jeder Ecke des ebenen necks drei Winkel zusammen: ein innerer Winkel des ebenen necks und zwei Dreieckswinkel. Die Summe der letztern ist aber nach vor. §. größer als der eine Winkel des ebenen necks, und folglich beträgt die Summe aller der Dreieckswinkel, welche nicht an der Spitze der körperlichen Ecke liegen, mehr als die Summe der innern Winkel des ebenen necks, also mehr als 2nR — 4R. Subtrahirt man dies von der oben angegebenen Winkelsumme 2nR, so bleibt für die Winkel an der Spitze, also für die Seiten des körperlichen necks, weniger als 4R übrig.

Anm. 1. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich leicht anschaulich machen. Versucht man nämlich ein Stück Papier von einem Punkte aus, der inmitten desselben liegt, zu einem körperlichen neck zusammenzufalten, so gelingt dies nur, wenn man zuvor von jenem Punkte aus einen Sector aus dem Papiere herausschneidet.

Anm. 2. Eine untere Gränze für die Summe der Seiten, also eine Angabe, wie groß dieselbe mindestens sein müsse, kann es nicht geben.

§. 25. Lehrsatz.

Die Summe aller Winkel eines körperlichen necks beträgt, wenn dieselben sämmtlich hohl sind, mehr als 2nR — 4R und weniger als 2nR.

Beweis. Bildet man die Ergänzungsecke, so betragen deren Seiten zusammen mit den Winkeln des körperlichen necks 2nR. (§. 21.). Die Summe jener Seiten beträgt weniger als 4R, und es liegt folglich die Summe der erwähnten Winkel zwischen den Gränzen 2nR und 2nR — 4R.

Anm. Bei einem körperlichen Dreiecke liegt die Summe der Winkel zwischen 6R und 2R. Sind x, y, z diese drei Winkel, so sind (2R — x), (2R — y), (2R — z) die Seiten des Polardreiecks. Da nun (2R — x) + (2R — y) größer als (2R — z) ist, so folgt, daß (x + y) kleiner als (2R + z) sein muß.

§. 26. Erklärung.

Zwei körperliche Ecken sind congruent, wenn beide dieselben Seiten und Winkel in derselben Reihenfolge haben, so daß man also eine Ecke in die andere hineingeschoben denken kann, und sich beide dann vollständig decken. Es läßt sich nun, wie bei den ebenen Dreiecken, nachweisen, daß zwei körperliche Dreiecke im Allgemeinen congruent sind, wenn sie in drei Stücken übereinstimmen (welche jedoch auch dieselbe Lage zu einander haben müssen). Da aber die Lehrsätze, wie die Beweise, fast unverändert dieselben bleiben würden, wie sie in der Planimetrie gegeben sind, so können sie hier übergangen werden.

Anm. 1. Als einziger besonderer Fall, dessen Beweis nicht aus der Planimetrie entlehnt werden kann, ist anzuführen, daß zwei körperliche Dreiecke congruent sind, wenn ihre Winkel der Größe und Lage nach übereinstimmen. Der Beweis ist indessen ziemlich einfach. Sind nämlich bei zwei körperlichen Dreiecken die Winkel beziehlich einander gleich, so sind es bei ihren Polardreiecken die Seiten, und die Polardreiecke sind also congruent. Da nun folglich auch deren Winkel beziehlich einander gleich sind, so sind es wiederum umgekehrt bei den gegebenen Dreiecken auch die Seiten.

Anm. 2. Stimmen zwei körperliche Dreiecke in allen Stücken überein, ist aber die Reihenfolge dieser Stücke in beiden Dreiecken eine entgegengesetzte, so ist das eine Dreieck congruent dem Scheiteldreiecke des andern. Nur das gleichschenklige körperliche Dreieck ist seinem Scheiteldreiecke congruent.

§. 27. Lehrsatz.

Ein gleichschenkliges körperliches Dreieck läßt sich durch eine Ebene in zwei symmetrische Hälften zerlegen. Diese Ebene halbirt gleichzeitig das Dreieck, den zwischen beiden gleichen Seiten liegenden Winkel und die dritte Seite, und steht auf letzterer senkrecht.

Beweis. Er ergiebt sich daraus, daß jeder der beiden Theile congruent dem Scheiteldreiecke des andern ist.

Drittes Capitel.

Von den vollständig begränzten Körpern.

§. 28. Erklärung.

Ein auf allen Seiten von ebenen oder krummen Flächen begränzter Raum heißt ein geometrischer Körper; derselbe heißt ein eckiger Körper oder Polyeder, wenn sämmtliche Gränzflächen Ebenen sind, und heißt ein runder, wenn alle oder einige Gränzflächen gekrümmt sind.

Von den ein Polyeder begränzenden Ebenen nennt man diejenige, auf welcher es ruhend gedacht werden kann, die Grundebene, die übrigen hingegen Seitenebenen. Die Kanten werden unterschieden als Grundkanten und Seitenkanten, und die von zwei Kanten gebildeten Winkel heißen Kantenwinkel. Die Namen Ecke, Flächenwinkel, Höhe bedürfen keiner weiteren Erklärung. Wenn einige dieser Bezeichnungen auch bei runden Körpern angewendet werden, so haben sie dieselbe Bedeutung.

Ein Polyeder heißt regulär, wenn seine Gränzebenen congruente, reguläre necke sind, die mit einander gleiche Flächenwinkel bilden.

Anm. Für die nachfolgenden §§. soll vorausgesetzt werden, daß die vorkommenden Winkel sämmtlich hohl sind. (Vergl. §. 20, Anm. 2).

A. Das Prisma.

§. 29. Erklärung.

Zieht man aus einer Ecke eines beliebigen ebenen necks eine Linie, die nicht in derselben Ebene liegt, und aus jeder der übrigen Ecken auf derselben Seite der Figur eine Linie parallel mit ersterer, so begränzen die Ebenen, welche durch je zwei aufeinander folgende Linien gelegt werden, einen *prismatischen Raum*. Begränzt man diesen auch auf der noch offenen Seite durch ein neck, welches dem erstern parallel ist, so erhält man ein *nseitiges Prisma*. Die *Grundebene* desselben ist eins der beiden necke, die *Höhe* der senkrechte Abstand derselben. Sind die beiden Grundebenen eines Prisma nicht parallel, so heißt das Prisma *schief abgeschnitten*. Ein Prisma ist *gerade*, wenn eine Seitenkante (folglich auch jede der übrigen und jede Seitenebene) senkrecht auf der Grundebene steht; in den übrigen Fällen ist es *schief*.

Ein vierseitiges Prisma, dessen Grundebene ein Parallelogramm ist, wird *Parallelipipedum* genannt; das gerade Parallelipipedum heißt *rechtwinklig*, wenn die Grundebene ein Rechteck ist; das rechtwinklige heißt ein *Würfel* oder *Cubus*, wenn die Grundebene ein Quadrat, und die Höhe gleich der Seite dieses Quadrates ist. Eine Ebene, welche in einem Parallelipipedum durch zwei parallele Kanten hindurchgelegt wird, die nicht derselben Gränzebene zugehören, nennt man *Diagonalebene*; die Diagonalen der Diagonalebenen heißen *Eckdiagonalen*.

§. 30. Lehrsätze.

1) Die Seitenebenen eines jeden Prisma sind im Allgemeinen Parallelogramme; sie sind Rechtecke, wenn das Prisma gerade ist. Es sind daher alle Seitenkanten eines Prisma einander gleich; ferner die Kanten der einen Grundebene beziehlich gleich denen der andern.

2) Die beiden Grundebenen eines Prisma sind einander congruent.

Beweis zu 1). Er ergiebt sich aus der Erklärung des vorigen §.

Beweis zu 2). In jeder Seitenkante stoßen von beiden Grundebenen je zwei Seiten zusammen, die gleich und parallel sind, folglich auch gleiche Winkel einschließen. Hieraus ergiebt sich aber die Congruenz der beiden Grundebenen. — Außerdem folgt, daß überhaupt parallele durch ein Prisma hindurchgehende Ebenen congruente Querschnitte geben.

Anm. zu 2). Die Umkehrung, daß congruente Querschnitte auch parallel sein müssen, ist nur in einzelnen Fällen richtig. Da indessen dieselbe Frage sich bei noch mehreren Körpern wiederholt, so ist eine genauere Erörterung nur in dem Abschnitte über den Cylinder gegeben. Vorläufig kann ein Hinweisen auf §. 127 der Planimetrie genügen.

§. 31. Lehrsätze.

1) Ein Parallelepipedum hat zu Seitenebenen entweder vier schiefwinklige Parallelogramme, oder zwei schiefwinklige und zwei rechtwinklige, oder vier rechtwinklige. Die gegenüberliegenden Seitenebenen sind einander parallel und congruent.

2) Kennt man von einem Parallelepipedum die drei Kanten- und die drei Flächenwinkel, welche in einer Ecke zusammenstoßen, so kennt man auch alle übrigen. Letztere sind entweder ersteren gleich, oder sind deren Supplemente.

3) Die gegenüberliegenden räumlichen Ecken eines Parallelepipedums sind im Allgemeinen symmetrisch; die eines geraden Parallelepipedums sind außerdem gleichschenklig, folglich auch congruent.

4) Jede Ebene, welche die vier Seitenebenen eines Parallelepipedums durchschneidet, bildet als Durchschnittsfigur ein Parallelogramm.

Anm. Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus der Figur.

§. 32. Zusatz.

1) Ein Parallelepipedum hat sechs Diagonalebenen, die Parallelogramme sind. Außerdem hat es vier Eckdiagonalen, von denen eine jede drei Diagonalebenen gemeinschaftlich ist.

2) Die Eckdiagonalen eines Parallelepipedums halbiren sich gegenseitig und schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte.

3) Die Diagonalebenen eines Parallelepipedums halbiren sich gegenseitig.

Beweis zu 1). Er ergiebt sich aus der Figur.

Beweis zu 2). Je zwei Eckdiagonalen, die in derselben Diagonalebene liegen, halbiren sich. Es liegt aber jede Eckdiagonale in drei Diagonalebenen und wird also von drei verschiedenen Eckdiagonalen halbirt. Daher bleibt der Halbirungspunkt immer derselbe und ist allen vier Eckdiagonalen gemeinschaftlich.

Beweis zu 3). Die sechs Diagonalebenen gehen (nach 2) durch den Mittelpunkt des Parallelepipedums, der zugleich Mittelpunkt einer

jeden Diagonalebene ist. Die Durchschnittslinien je zweier Diagonalebenen gehen aber ebenfalls durch den Mittelpunkt und halbiren folglich die zugehörigen Diagonalebenen, da dieselben Parallelogramme sind.

Anm. Als Uebungssätze lassen sich hier noch anknüpfen:

1) Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelepipedums zwischen zwei Gränzebenen gezogene Transversale wird in diesem Punkte halbirt. Zieht man ferner in den zwei Gränzebenen, welche von dieser Transversale getroffen werden, parallele Linien durch die Treffpunkte, so sind die zwei Theile der einen Linie beziehlich gleich denen der andern.

2) Die durch den Mittelpunkt eines Parallelepipedums gehenden Transversalebenen sind Parallelogramme, welche sich gegenseitig halbiren.

3) Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelepipedums hindurchgehende Ebene zerlegt dasselbe in zwei symmetrische Theile.

§. 33. Zusatz.

1) Die Diagonalebenen des rechtwinkligen Parallelepipedums sind Rechtecke, und je zwei derselben sind congruent; die Eckdiagonalen sind sämmtlich einander gleich.

2) Werden bei einem rechtwinkligen Parallelepipedum drei zusammenstoßende Kanten mit a, b, c, die Eckdiagonalen mit d bezeichnet, so ist $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Anm. Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus der Figur mit Hülfe bekannter planimetrischer Sätze.

§. 34. Erklärung.

Zwei Prismen sind congruent, wenn sie dieselben Gränzebenen und Winkel in derselben Reihenfolge haben, so daß also, wenn man sich das eine in das andere hineingeschoben denkt, je zwei Gränzebenen sich vollständig decken. Zwei Prismen sind ähnlich, wenn sie ähnliche Gränzebenen und dieselben Winkel in derselben Reihenfolge haben; man kann sich alsdann das eine so in das andere hineingeschoben denken, daß je zwei Gränzebenen einander ähnlich und parallel sind.

Anm. Es ließe sich hier eine Reihe von Sätzen aufstellen, in denen nachgewiesen würde, unter welchen Bedingungen zwei Prismen congruent, oder ähnlich sind. Diese Sätze finden aber eine so seltene Anwendung, daß man sie im Allgemeinen nur dann aufstellt und beweist, wenn eine vorkommende Aufgabe dies nöthig macht. Es gilt dies übrigens nicht bloß für die Prismen, sondern für alle Polyeder.

B. Die Pyramide.

§. 35. Erklärung.

Wird ein körperliches neck auf der offenen Seite durch ein ebenes neck begränzt, so entsteht eine nseitige Pyramide. Das begränzende neck heißt die Grundebene, und der Punkt, in welchem die begränzenden Dreiecke zusammenstoßen, die Spitze der Pyramide. Eine Pyramide heißt gleichseitig, wenn ihre Seitenkanten sämmtlich einander gleich sind; die gleichseitige Pyramide heißt gleichförmig, auch wohl regulär, wenn ihre Grundebene ein reguläres neck ist.

Legt man durch eine Pyramide eine Ebene hindurch, parallel mit der Grundebene, so zerschneidet diese Ebene die Pyramide in zwei Theile: der eine ist wiederum eine Pyramide und heißt Ergänzungspyramide, der andere ist ein von zwei necken und n Trapezen begränzter Körper und heißt eine abgekürzte Pyramide. Die zwei necke, welche eine abgekürzte Pyramide begränzen, heißen deren Grundebenen, ihr senkrechter Abstand die Höhe.

Anm. Einer abgekürzten Pyramide ähnlich, aber wohl von ihr zu unterscheiden, ist der Obelisk. Beide Körper sind begränzt von zwei parallelen necken als Grundebenen, und von Trapezen als Seitenebenen; während aber die Seitenkanten einer abgekürzten Pyramide sich bei gehöriger Verlängerung in ein und demselben Punkte schneiden, so ist dies beim Obelisken (im weiteren Sinne des Worts) nicht durchaus nothwendig. Nach der gegebenen Erklärung sind auch Prismen und Pyramiden als besondere Fälle zu den Obelisken zu rechnen, jedoch wird das Wort Obelisk gewöhnlich in engerer Bedeutung gebraucht und auf den Fall beschränkt, wo die oben erwähnten Seitenkanten sich nicht in ein und demselben Punkte schneiden. Einen dreiseitigen Obelisken (im engeren Sinne des Worts) kann es nicht geben. (§. 20, Anm. 1.)

§. 36. Zusatz.

1) Um die Grundebene einer gleichseitigen Pyramide läßt sich ein Kreis beschreiben.

2) Die Höhe einer gleichseitigen Pyramide trifft den Mittelpunkt des um die Grundebene beschriebenen Kreises.

3) Die Seitenebenen einer regulären Pyramide bilden mit der Grundebene gleiche Flächenwinkel, und die Seitenkanten mit der Grundebene gleiche Neigungswinkel.

Beweis zu 1). Er folgt aus §. 10, 3).

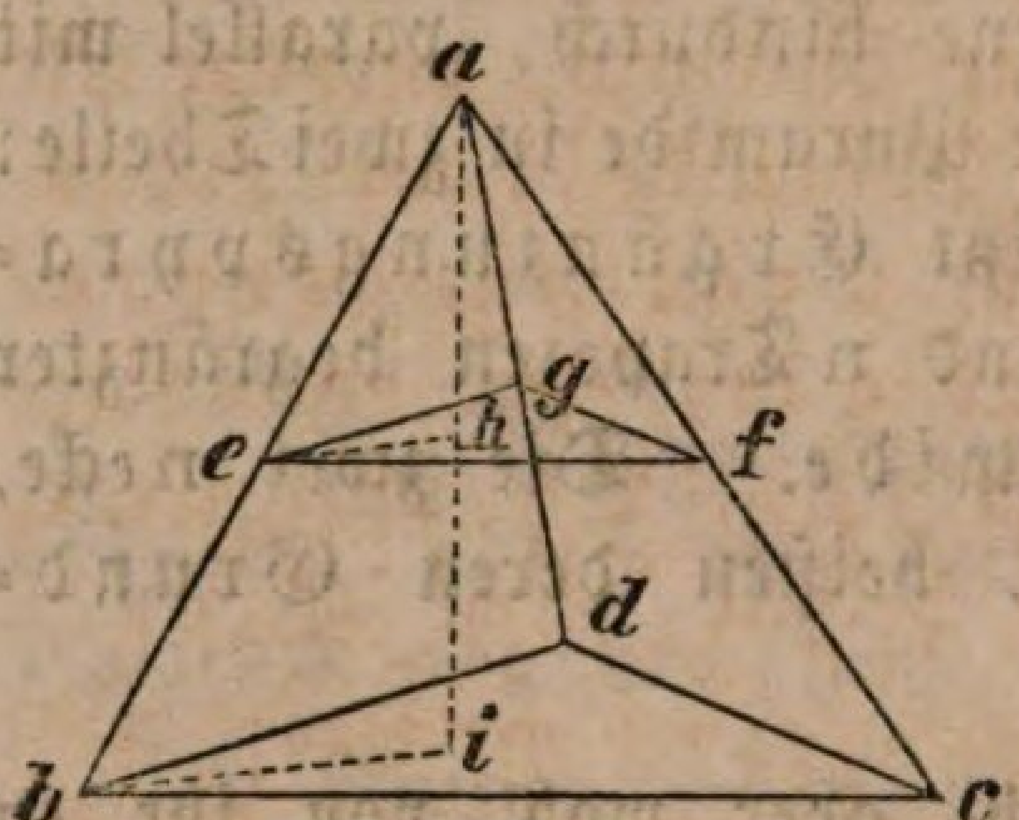
Beweis zu 2). Er folgt ebenfalls aus §. 10, 3).

Beweis zu 3). Jeder Eckpunkt der Grundebene ist zugleich die Spitze eines gleichschenkligen körperlichen Dreiecks. Alle diese körperlichen Dreiecke sind aber congruent, da sie in den drei Seiten übereinstimmen, und aus ihrer Congruenz ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes.

§. 37. Lehrsatz.

Wird eine Ebene durch eine Pyramide parallel mit der Grundebene gelegt, so ist der Durchschnitt eine der Grundebene ähnliche Figur. Die sich entsprechenden Seiten dieser Figuren verhalten sich wie die Abstände letzterer von der Spitze, die Figuren selbst wie die Quadrate dieser Abstände.

Fig. 9.



Beweis. Er braucht, wie sich aus dem Weiteren ergeben wird, nur für die dreiseitige Pyramide geführt zu werden. Ist nun (Fig. 9.) abcd eine dreiseitige Pyramide, und ist die Ebene efg parallel der Ebene bcd, so ist ef || bc. Folglich ist ef : bc = ae : ab = = af : ac, und in demselben Verhältnisse steht auch gf zu dc, ge zu db (Vergl. §. 5, 7). Da außerdem die gleichliegenden Winkel in den beiden Figuren (efg und bcd) gleich sein müssen, weil ihre Schenkel paarweise parallel sind, so folgt, daß beide Figuren ähnlich sind. Dieselben verhalten sich also wie $ef^2 : bc^2$ oder wie $ae^2 : ab^2$. Statt dieses Verhältnisses kann man auch ein anderes setzen. Zieht man nämlich die Höhe ahi, so ist wiederum eh || bi, folglich ae : ab = ah : ai, und hierdurch ist die Behauptung erwiesen.

Anm. 1. Die beiden Pyramiden aefg und abcd sind einander ähnlich (Vergl. §. 34).

Anm. 2. Sollen aus den gegebenen Kanten einer abgekürzten Pyramide die Kanten der vollständigen Pyramide berechnet werden, so hat man nach dem Gesagten dafür folgende Gleichung:

$$ab : ae = bc : ef, \text{ oder}$$
$$(x + eb) : x = bc : ef, \text{ oder}$$
$$eb : x = (bc - ef) : ef, \text{ daher}$$
$$x = (ef . eb) : (bc - ef).$$

§. 38. Zusatz.

Aus vorigem §. ergiebt sich noch folgender Satz:

Haben zwei Pyramiden dieselben Höhen und gleiche, wenn auch nach Form und Seitenzahl verschiedene Grundebenen, so bilden je zwei Ebenen, die in gleichen Abständen von den Grundebenen parallel mit diesen durch die Pyramiden gelegt werden, gleiche Querschnitte.

Anm. Ueber die Umkehrung dieses Satzes vergleiche §. 30, Anm.

C. Der Cylinder.

§. 39. Erklärung.

Zieht man aus dem Mittelpunkte eines Kreises unter einem beliebigen Neigungswinkel gegen dessen Ebene eine Linie a und bewegt dann eine andere gleich große Linie b auf der ganzen Peripherie (Directrix) entlang so fort, daß sie immer parallel mit a bleibt, so beschreibt b eine cylindrische Fläche, und diese umschließt einen cylindrischen Raum. Wird dieser auf der noch offenen Seite durch eine Ebene begränzt, welche mit der Ebene der Directrix parallel ist, so entsteht ein Cylinder. Die beiden parallelen Ebenen sind die Grundebenen, ihr senkrechter Abstand ist die Höhe des Cylinders. Die gekrümmte Fläche heißt der Mantel, die Linie a (welche man sich auch von der zweiten Grundebene begränzt denkt) die Axe, jede mit ihr parallel im Mantel gezogene Linie eine Seite des Cylinders. Ein Cylinder ist gerade (Walze, Welle), wenn die Axe senkrecht auf beiden Grundebenen steht; in den übrigen Fällen ist er schief. Durch eine Ebene, welche den Cylinder durchschneidet, und welche der Grundebene nicht parallel ist, wird der Cylinder schief abgeschnitten. Ein schief abgeschnittener Cylinder, bei welchem die beiden Grundebenen einen Punkt gemeinschaftlich haben, heißt eine Cylinderklaue.

Anm. 1. Den Cylinder kann man betrachten als ein Prisma, dessen Grundebene ein reguläres neck von unendlich vielen Seiten ist.

Anm. 2. Den geraden Cylinder kann man sich dadurch entstanden denken, daß ein Rechteck um eine seiner Seiten herumgedrehet wird.

§. 40. Zusatz.

1) Alle Seiten eines Cylinders sind einander gleich, und jede ist gleich der Axe.

2) Jede durch die Axe eines Cylinders hindurchgelegte Ebene schneidet den Mantel in zwei geraden, der Axe parallelen Linien, also in zwei Seiten.

3) Jede aus der Directrix eines Cylinders parallel mit der Axe gezogene Linie liegt völlig im Mantel, ist also eine Seite.

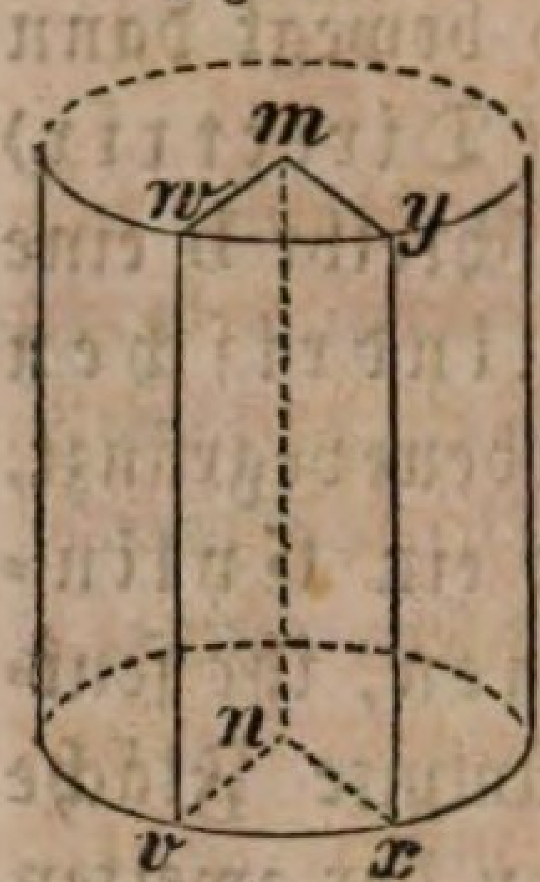
Anm. Der Beweis zu 1) ergiebt sich aus §. 5, 5; die Beweise zu 2) und 3) folgen unmittelbar aus der Erklärung des §. 39.

§. 41. Lehrsätze.

1) Jede Ebene, die parallel mit der Ebene der Directrix durch einen Cylinder gelegt wird, schneidet den Mantel in einer Kreislinie, welche der Directrix congruent ist.

2) Jede Ebene, welche parallel mit der Axe durch einen Cylinder gelegt wird, schneidet den Mantel in zwei parallelen geraden Linien. Die Durchschnittsfigur ist also im Allgemeinen ein Parallelogramm; beim geraden Cylinder ist sie ein Rechteck.

Fig. 10.

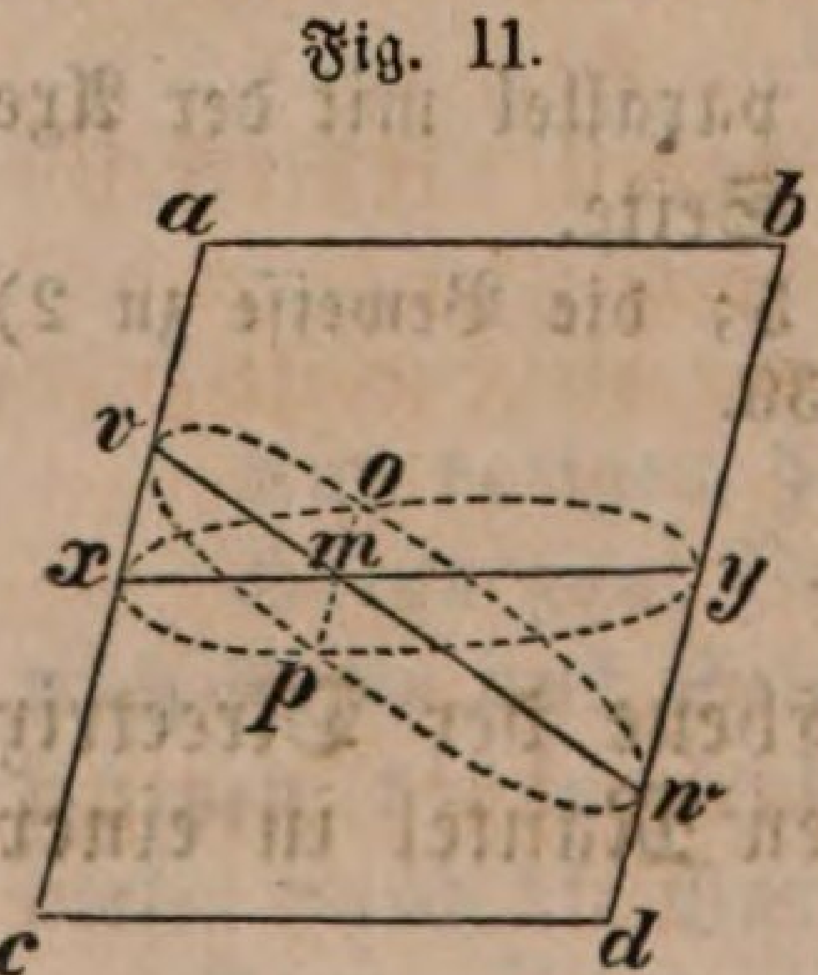


Beweis zu 1). Es seien (Fig. 10.) v und x zwei Punkte der Directrix; die Ebene wmy sei parallel mit der Ebene vnx, und es sei mn die Axe des Cylinders. Zieht man nun die Seite vw (parallel mit nm), so ist wv=mn und auch wv || mn; folglich ist wmvn ein Parallelogramm, und in demselben ist wm = vn. Jede aus m nach der Durchschnittslinie gezogene Gerade ist also gleich dem Radius der Directrix, und die Durchschnittslinie selbst ist daher der Directrix congruent.

Beweis zu 2). Legt man (Fig. 10.) durch die Punkte v und x eine Ebene parallel mit mn, so müssen zwei Linien, die man aus v und x parallel mit mn zieht, in dieser Ebene liegen. Sie liegen aber (§. 40, 3) auch im Mantel, sind folglich die Durchschnittslinien jener Ebene und des Mantels. Sind vw und xy diese Linien, so ist wyvx ein Parallelogramm, weil wv und yx einander gleich und parallel sind; steht außerdem (beim geraden Cylinder) mn senkrecht auf der Grundebene, so gilt dies auch für die Linien wv und yx, und es ist alsdann wyvx ein Rechteck.

Anm. 1. Zieht man an eine der beiden Grundebenen eine Tangente und legt durch diese Tangente eine Ebene parallel mit der Axe, so haben der Mantel und diese Ebene eine Linie (Seite) gemeinschaftlich. In dieser Linie wird aber der Mantel berührt, nicht geschnitten, und außerhalb derselben können die Ebene und der Mantel keinen Punkt weiter miteinander gemeinschaftlich haben; denn gäbe es einen solchen, so würde ein durch diesen Punkt parallel mit der Grundebene geführter Querschnitt einen Kreis vorstellen, der mit einer Tangente zwei Punkte gemeinschaftlich hätte. Eine gerade Linie, die nicht Seite des Cylinders ist, kann also den Mantel nur in einem Punkte berühren, und mit Ausnahme der Seiten sind alle im Mantel gezogenen Linien gekrümmt.

Fig. 11.



Anm. 2. Jede durch einen beliebigen Cylinder parallel mit der Grundebene hindurchgelegte Ebene durchschneidet den Mantel in einer Kreislinie, aber es ist umgekehrt ein kreisförmiger Querschnitt nicht nothwendig in jedem Cylinder der Grundebene parallel. Stellt nämlich (Fig. 11.) abcd den Durchschnitt eines schiefen Cylinders vor, gebildet durch eine Ebene, welche durch die Axe geht und auf den Grundebenen senkrecht steht, so ist jede mit ab parallel laufende Querlinie, z. B. xy, Durchmesser eines kreisförmigen Querschnittes (xoyp) und ist gleich dem Durchmesser der Grundebene. Zieht man

nun eine Linie vw so, daß $\angle axy = \angle cvw$, also auch $mv = mx$, $mw = my$ ist, so schneidet eine durch vw hindurchgelegte, senkrecht auf abcd stehende Ebene den Cylindermantel in einer Linie vowp, welche ebenfalls der Directrix congruent ist, und es ist vw der Durchmesser des Kreises vowp.

Es schneiden sich nämlich zunächst der Durchschnitt vowp und der zu xy gehörende Kreis xoyp in einer geraden Linie omp. Da nun $vm = xm$, $wm = ym$ ist, also auch $xm . my = vm . mw$, und da ferner xoyp ein Kreis, folglich $xm . my = pm . mo$ ist, so muß auch $vm . mw = pm . mo$ sein. Die Punkte v, o, w, p haben also eine Eigenschaft, welche vier Punkten einer Kreislinie zukommt. Daß nun dieselbe Eigenschaft auch für andere Punkte der Durchschnittslinie vowp gilt, ergiebt sich leicht, wenn man vowp durch verschiedene andere, mit xoyp parallel gehende Kreise durchschneidet, wobei man statt omp andere Durchschnittslinien erhält.

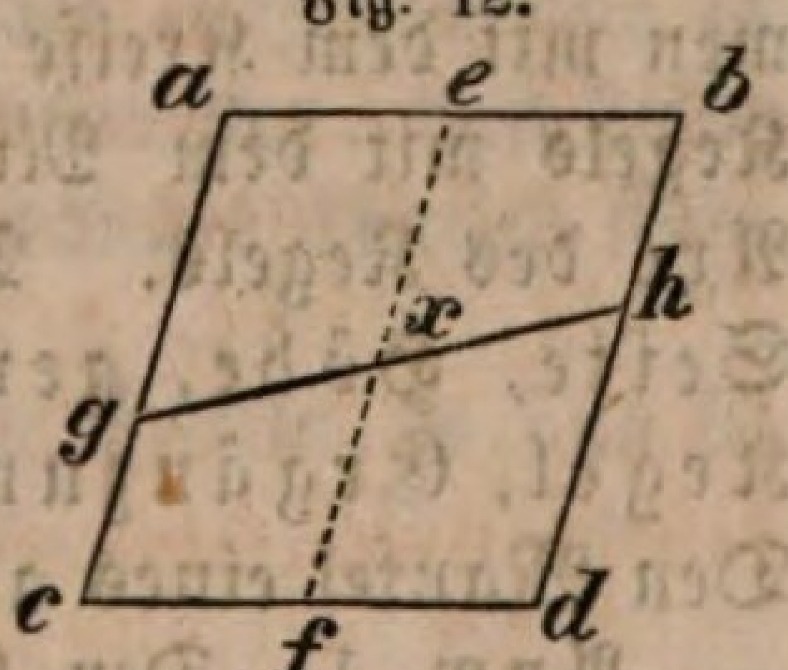
Aus der Construction geht zugleich hervor, daß bei einem geraden Cylinder die Linien xy und vw zusammenfallen, oder parallel sein müssen, daß also bei einem solchen ein kreisförmiger Querschnitt stets der Grundebene parallel ist.

Anm. 3. Bei einem schiefen Cylinder liefert ein senkrecht zur Axe geführter Querschnitt nie einen Kreis, und es kann daher ein schiefer Cylinder nicht auf der gewöhnlichen Drehbank angefertigt werden.

§. 42. Zusatz.

Zieht man in einem Cylinder durch die Mitte x der Axe eine gerade Linie, welche zwei Seiten schneidet, so theilt sie dieselben in je zwei Stücke, von welchen das obere Stück der einen Seite gleich dem unteren der anderen ist, und sie selbst wird in dem Mittelpunkte x halbirt.

Fig. 12.



Beweis. Es sei (Fig. 12.) exf die Axe des Cylinders, gxh die schneidende Linie, abcd die Durchschnittsfigur, welche eine durch exf und gxh hindurch gelegte Ebene mit dem Cylinder bildet. Alsdann ist abcd ein Parallelogramm, x der Mittelpunkt desselben, folglich $ag = hd$, $bh = gc$, $gx = xh$.

§. 43. Zusatz.

Legt man in einem geraden Cylinder durch die Mitte der Axe eine Ebene, so theilt diese den Cylinder in zwei congruente Körper.

Beweis. Wird der Beweis auf die Fälle beschränkt, daß der Cylinder in zwei schief abgeschnittene Cylinder, oder in zwei Klauen getheilt ist, so sind die Grundebenen der beiden Körper congruente Kreise, auf denen jede Seite (oder der Mantel in jedem einzelnen Punkte) senkrecht steht. Es läßt sich daher, wenn beide Körper hohl gedacht werden, der eine in den anderen hineinschieben. Da nun außerdem beiden Körpern eine solche Lage gegeben werden kann, daß immer zwei gleiche Seiten aufeinanderfallen (§. 42), so sind sie congruent.

Anm. Als Uebungsaufgabe kann die Frage dienen: In welcher Beziehung stehen die beiden erwähnten Körper bei einem schiefen Cylinder oder bei einem beliebigen Prisma?

§. 44. Erklärung.

Wird der Mantel eines geraden Cylinders auf eine Ebene gelegt und auseinander gerollt, indem man einen Schnitt durch eine Seite hindurchgeführt denkt, so bildet er ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Directrix, und dessen Höhe gleich der Höhe des Cylinders ist. Der Mantel einer geraden Klaue kann folglich zu einem gleichschenkligen Dreiecke ausgebreitet werden. Der ausgebreitete Mantel eines schiefen Cylinders giebt eine Figur, die von zwei geraden und zwei krummen Linien begränzt ist, welche letzteren aber keine Kreisbogen sind.

D. Der Kegel.

§. 45. Erklärung.

Zieht man aus einem Punkte a außerhalb einer Kreisebene eine gerade Linie nach der Peripherie (Directrix) und bewegt diese Linie so fort, daß sie bei jeder Lage den Punkt a mit der Peripherie verbindet, so beschreibt sie eine Kegelfläche, und diese begränzt zusammen mit dem Kreise einen Kegel. Eine Linie, welche die Spitze eines Kegels mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises verbindet, heißt Axe des Kegels. Die Ausdrücke: Mantel, Spitze, Grundebene, Seite, Höhe, gerader, schiefer und schief abgeschnittener Kegel, Ergänzungskegel erklären sich aus den §§. 35 und 39. Den Mantel eines abgekürzten Kegels nennt man eine Kegelzone.

Anm. 1. Den Kegel kann man betrachten als eine Pyramide, deren Grundebene ein reguläres neck von unendlich vielen Seiten ist.

Anm. 2. Den geraden Kegel kann man sich dadurch entstanden denken, daß man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Catheten herumdreht.

§. 46. Zusatz.

1) Eine gerade Linie, welche aus einem Punkte der Directrix nach der Spitze des Kegels gezogen wird, liegt völlig im Mantel desselben.

2) Eine Ebene, welche einen Kegel schneidet und durch die Spitze desselben geht, schneidet den Mantel in zwei geraden Linien.

3) Die Seiten eines geraden Kegels sind einander gleich. Ein schiefer Kegel hat eine größte und eine kleinste Seite, und die übrigen Seiten sind paarweise einander gleich.

Anm. 1. Die Beweise zu 1) und 2) folgen aus der Erklärung. Die erste Hälfte von 3) folgt aus §. 10, 2; die zweite ergiebt sich aus bekannten planimetrischen Sätzen. Verbindet man nämlich den Fußpunkt der Höhe mit irgend einem Punkte der Directrix, so ist durch diese Verbindungslinie und durch die Höhe ein rechtwinkliges Dreieck bestimmt. Vergleicht man nun aber alle möglichen, auf diese Art entstehenden rechtwinkligen Dreiecke mit einander, so ergiebt sich aus bekannten planimetrischen Sätzen die Richtigkeit der Behauptung.

Anm. 2. Wird eine Ebene durch die Spitze eines Kegels und durch eine an die Directrix gezogene Tangente gelegt, so berührt diese Ebene den Mantel in einer Seite und hat außerhalb dieser Seite keinen Punkt weiter mit ihm gemeinschaftlich. Alle im Mantel gezogenen Linien, mit Ausnahme der Seiten, sind folglich gekrümmt. (Vergl. §. 41, Anm. 1.)

§. 47. Lehrsätze.

1) Wird eine Ebene durch einen Kegel parallel mit der Grundebene gelegt, so schneidet sie den Mantel in einer Kreislinie. Die Radien der beiden Kreise (der Durchschnittsfigur und der Grundebene) verhalten sich wie die Abstände letzterer von der Spitze, die Kreise selbst wie die Quadrate dieser Abstände.

2) Haben zwei Kegel dieselben Grundebenen und Höhen, so bilden je zwei Ebenen, die in gleichen Abständen von den Grundebenen parallel mit diesen durch die Kegel gelegt werden, congruente Querschnitte.

Beweis zu 1). Er wird ebenso geführt wie der entsprechende in §. 37. Es läßt sich ferner ebenso die Bemerkung anknüpfen, daß beide Kegel (der vollständige und der Ergänzungskegel) einander ähnlich sind.

Beweis zu 2). Er folgt unmittelbar aus 1).

Anm. Durchschneiden zwei Ebenen einen Kegel in Kreisen, so sind sie nicht nothwendig parallel. (Vergl. §. 41, Anm. 2.)

§. 48. Zusatz.

Wird der Mantel eines geraden Kegels auf einer Ebene ausgebreitet, so bildet er einen Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Seite des Kegels, und dessen Bogen gleich der Directrix ist. Der Mantel eines abgekürzten geraden Kegels bildet auseinandergerollt eine Art Trapez, dessen parallele Seiten Bogen concentrischer Kreise sind. Der Mantel eines schiefen Kegels läßt sich ebenfalls auf einer Ebene ausbreiten, doch ist die krumme Linie, von welcher die so entstehende Figur begränzt wird, kein Kreisbogen.

E. Die regulären Polyeder.

§. 49. Erklärung.

Von den ein reguläres Polyeder begränzenden regulären Figuren müssen mindestens drei in einer Ecke zusammenstoßen. Da aber die Summe der hier zusammenstoßenden Kantenwinkel kleiner als 4R sein muß (§. 24), so kann ein reguläres Polyeder nur von gleichseitigen Dreiecken, oder von Quadraten, oder von regulären Fünfecken begränzt sein, indem drei Winkel eines regulären Sechsecks zusammen schon 4R betragen. Ist ein reguläres Polyeder von Quadraten oder regulären Fünfecken begränzt, so können immer nur drei dieser Figuren in einer Ecke zusammenstoßen, ist es aber von gleichseitigen Dreiecken begränzt, so können in einer Ecke drei, vier, oder fünf derselben zusammenstoßen.

Es kann also höchstens fünf reguläre Körper geben. Damit ist freilich nicht bewiesen, daß dieselben auch wirklich existiren, doch kann dieser Beweis vorläufig übergangen und zunächst durch anzufertigende Modelle ersetzt werden. Daß es überhaupt reguläre Körper giebt, geht schon aus dem Vorhandensein des Würfels hervor.*)

Diese fünf Körper sind:

1) das reguläre	Tetraeder,	begränzt von	vier	regulären	Dreiecken;
2) „	„	Octaeder,	„	„ acht	„	„
3) „	„	Icosaeder,	„	„ zwanzig	„	„
4) „	„	Hexaeder,	„	„ sechs	„	Vierecken;
5) „	„	Dodecaeder,	„	„ zwölf	„	Fünfecken.

Anm. 1. Breitet man die Oberfläche eines regulären Polyeders auf einer Ebene aus, so erhält man eine zusammenhängende Figur. Es lassen sich daher die Modelle leicht aus Pappe herstellen, wenn man sich zunächst die zusammenhängende Figur (das Netz) aus Pappe ausschneidet und dann einen nur oberflächlichen Schnitt über die Stellen führt, an welchen durch Biegen die Kanten gebildet werden sollen.

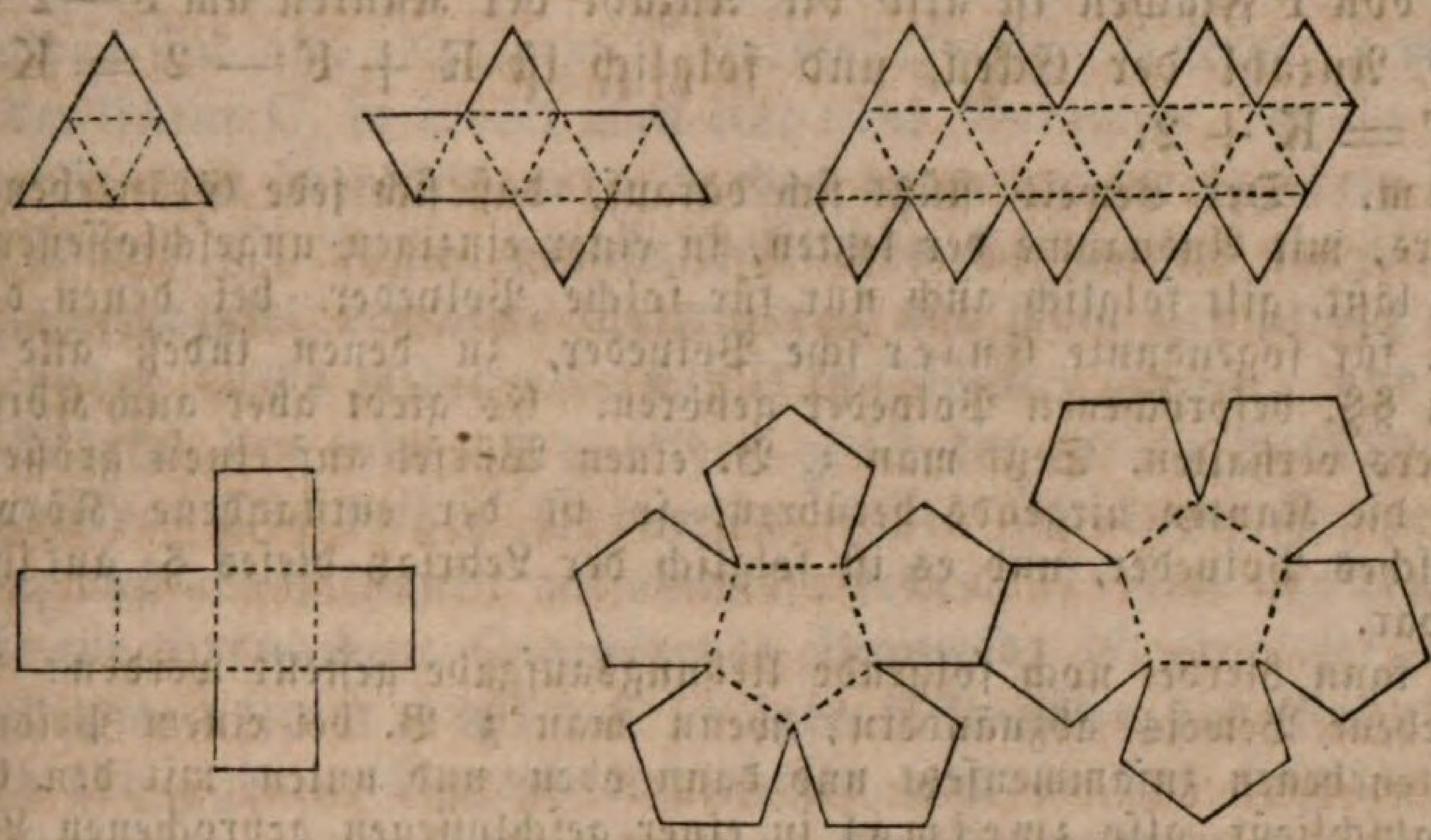
In Fig. 13 (s. S. 27) sind die auch ohne weitere Erklärung verständlichen Netze für die fünf regulären Polyeder gegeben.

Anm. 2. Den regulären Polyedern verwandt ist eine Gruppe von Körpern, deren Gränzebenen zwar auch reguläre, unter gleichen Winkeln zusammenstoßende n ecke, aber nicht n ecke gleicher Art sind. Ein Körper dieser Art kann z. B. begränzt sein von Quadraten und gleichseitigen Dreiecken, von regulären Fünfecken und Sechsecken, von regulären Dreiecken, Vierecken und Fünfecken u. s. w. Man nennt dergleichen Körper archimedische, während die regulären Körper auch wohl pythagoräische oder platonische genannt werden. Eine zweite verwandte Gruppe wird von solchen Körpern

---

*) Der Beweis, daß die fünf regulären Polyeder wirklich existiren, ist in §. 79 gegeben.

Fig 13.



gebildet, deren Gränzebenen congruente Rhomben sind. Unter diesen sind besonders zu bemerken das von sechs Rhomben begränzte **Rhomboeder** und das von zwölf Rhomben begränzte **Rhombendodecaeder**.

Verschiedene Körperformen aus den erwähnten zwei Gruppen haben zwar eine große Bedeutung für die Krystallographie, jedoch kann hier nicht näher auf dieselben eingegangen werden.

§. 50. Lehrsatz.

Bezeichnet man für ein beliebiges (nicht nothwendig reguläres) Polyeder die Anzahl der Kanten mit K, die der Ecken mit E, die der Flächen mit F, so ist:

$$E + F = K + 2.$$

Beweis. Er beruhet darauf, daß bei einer geschlossenen gebrochenen Linie die Anzahl der Ecken gleich der Anzahl der Kanten (Seiten) ist, bei einer ungeschlossenen aber um 1 größer. Setzt man nun ein Polyeder aus seinen Gränzebenen zusammen, so fügt sich jede neu hinzutretende Ebene an die bereits vorhandenen in einer geraden, oder in einer ungeschlossenen gebrochenen Linie an, und nur die letzte, welche den Raum völlig abschließt, macht hiervon eine Ausnahme.

Zählt man während des Zusammensetzens die mit jeder neuen Ebene hinzutretenden Ecken und Kanten, so hat zwar jede Ebene gleich viel Ecken und Kanten, aber es dürfen diejenigen nicht mit in Rechnung kommen, die sich an bereits vorhandene anschließen. Die Anzahl der so wegfallenden Ecken ist aber nach dem Gesagten für jede hinzugefügte Ebene um 1 größer als die Anzahl der wegfallenden Kanten, und mit jeder neu hinzutretenden Ebene, von der zweiten bis zur vorletzten, wird

der Unterschied zwischen Kanten und Ecken um 1 größer. Bei einem Körper von F Flächen ist also die Anzahl der Kanten um F—2 größer als die Anzahl der Ecken, und folglich ist $E + F - 2 = K$, oder $E + F = K + 2$.

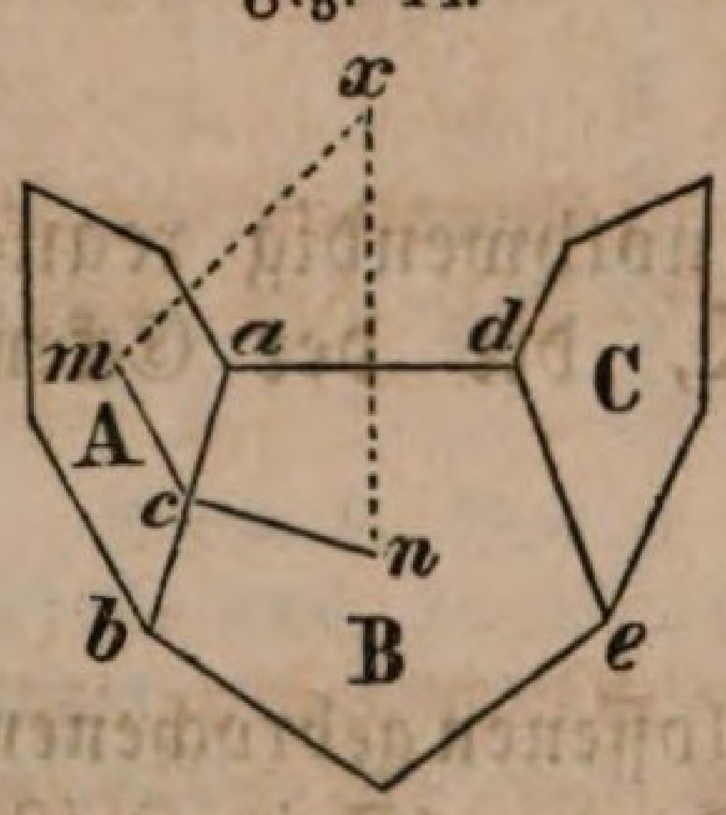
Anm. Der Beweis stützt sich darauf, daß sich jede Gränzebene eines Polyeders, mit Ausnahme der letzten, in einer einzigen ungeschlossenen Linie ansetzen läßt, gilt folglich auch nur für solche Polyeder, bei denen dies der Fall ist, für sogenannte Euler'sche Polyeder, zu denen indeß alle in den früheren §§. besprochenen Polyeder gehören. Es giebt aber auch Körper, die sich anders verhalten. Setzt man z. B. einen Würfel auf einen größeren, so daß sich die Kanten nirgends berühren, so ist der entstandene Körper kein Euler'sches Polyeder, und es ist folglich der Lehrsatz dieses §. auf ihn nicht anwendbar.

Es kann hierbei noch folgende Uebungsaufgabe gestellt werden: Wie ist der gegebene Beweis abzuändern, wenn man z. B. bei einem Prisma erst die Seitenebenen zusammensetzt und dann oben und unten mit den Grundebenen abschließt, also zweimal in einer geschlossenen gebrochenen Linie?

§. 51. Lehrsatz.

In jedem regulären Polyeder giebt es einen Punkt, der gleichweit von allen Ecken, wie auch gleichweit von allen Gränzebenen entfernt ist.

Fig. 14.



Construction. Von zwei zusammenstoßenden Gränzebenen suche man die Mittelpunkte und errichte in diesen Punkten auf jeder derselben eine Senkrechte. Ist*) (Fig. 14.) ab die gemeinschaftliche Kante der Ebenen A und B, c die Mitte derselben, und sind m und n die zwei Mittelpunkte von A und B, so stehen mc und nc senkrecht auf ab; folglich ist $\angle$mcn der Neigungswinkel der Ebenen A und B; die Ebene mcn steht also senkrecht auf denselben, und die erwähnten beiden Senkrechten, die auf A und B in den Punkten m und n errichtet werden, liegen in der Ebene mcn. Verlängert man nun die beiden Senkrechten, so müssen sie sich schneiden, da mcn ein hohler Winkel ist. Ihr Schneidungspunkt x aber ist der gesuchte Punkt, der Mittelpunkt des Polyeders.

Beweis. Verbindet man x mit allen Ecken der Ebenen A und B, so erhält man dadurch zwei gleichseitige Pyramiden (§. 10, 2), die zugleich regulär sind (§. 35), so daß also alle Flächenwinkel, welche die Seitenebenen mit der Grundebene bilden, einander gleich sind (§. 36). Aus

*) Es ist der Deutlichkeit wegen der Figur ein Dodecaeder zu Grunde gelegt, jedoch hat dies keinen Einfluß auf das Weitere.

der Congruenz der Dreiecke xcm und xcn folgt aber, daß jeder dieser Winkel gleich der Hälfte des Neigungswinkels mcn ist. Die beiden Pyramiden sind also congruent. Verbindet man nun ferner x mit allen Ecken der Ebene C, so erhält man eine neue Pyramide, welche mit der zu B gehörenden übereinstimmt: in den congruenten regulären Grundebenen B und C, in der gemeinschaftlichen Seitenebene xcd, und in dem Flächenwinkel, den diese Seitenebene mit jeder der beiden Grundebenen bildet. (Es bildet xde mit B den Winkel $\frac{1}{2}$mcn, und folglich ist der Winkel, den xde mit C bildet, gleich der andern Hälfte des Winkels mcn.) Die beiden Pyramiden lassen sich daher so ineinander schieben, daß alle Eckpunkte auf einander fallen; sie sind also congruent, und die zur Grundebene C gehörende Pyramide ist ebenfalls regulär. Verbindet man ferner x mit den übrigen Eckpunkten des Polyeders, so läßt sich der gegebene Beweis wiederholen, und es sind folglich sämmtliche Pyramiden, deren Grundebenen die Gränzebenen des Polyeders sind, und deren Spitzen in x liegen, einander congruent und sind regulär. Daraus ergiebt sich, daß alle Seitenkanten und ferner alle Höhen derselben einander gleich sind, oder daß x von allen Ecken und von allen Gränzebenen des Polyeders gleich weit entfernt ist.

Anm. Aus dem gegebenen Beweise folgt noch, daß die auf den Mittelpunkten aller Gränzebenen errichteten Senkrechten und ebenso die Halbirungsebenen aller Flächenwinkel sich in einem Punkte schneiden; ferner, daß die Linie xa (oder eine ähnliche) mit allen in a zusammenstoßenden Kanten denselben Winkel bildet und gegen alle in a zusammenstoßenden Gränzebenen gleiche Neigung hat.

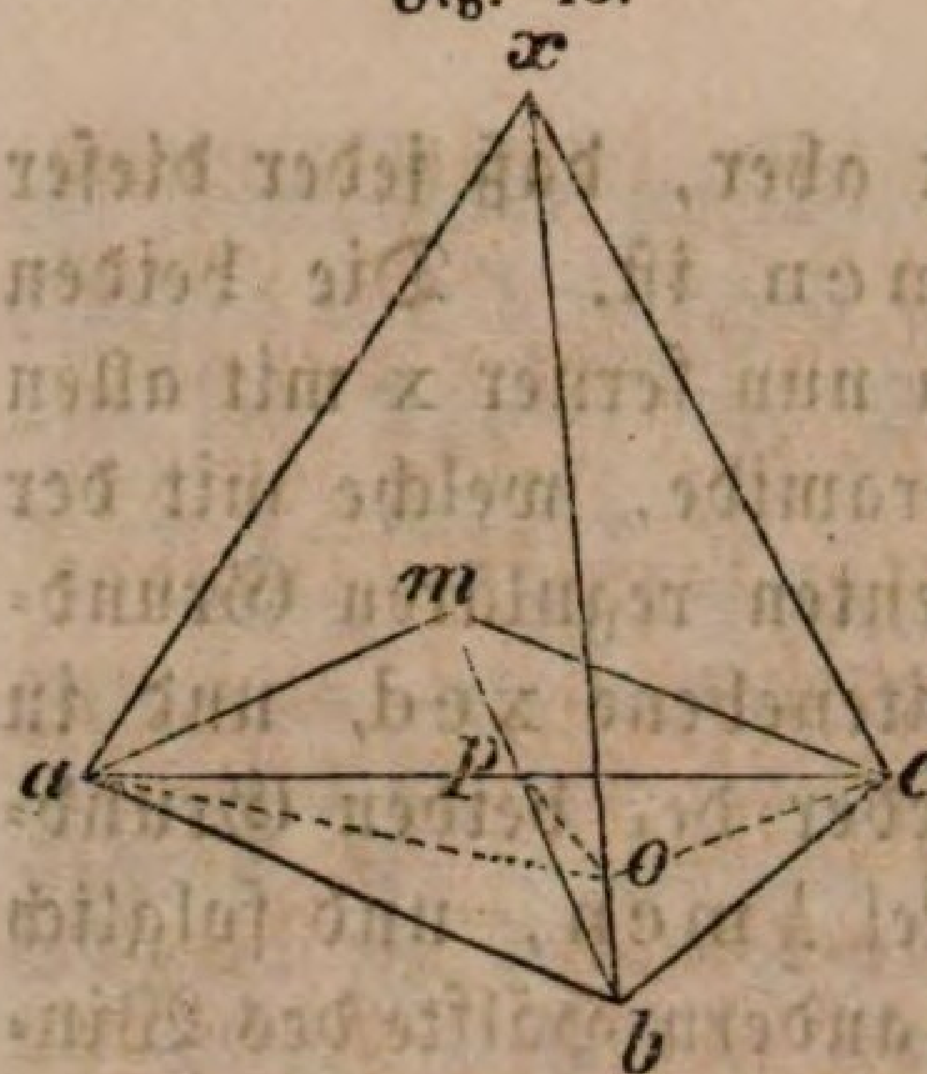
§. 52. Aufgabe.

Es soll der Neigungswinkel v bestimmt werden, der von zwei sich in einer Kante schneidenden Gränzebenen eines regulären Polyeders gebildet wird. Gegeben sind die Anzahl n der in einer Ecke zusammenstoßenden regulären Figuren, ferner der Umfangswinkel α einer jeden derselben.

Auflösung. Man schneide eine Ecke des Polyeders so ab, daß das abgeschnittene Stück eine reguläre Pyramide bildet;*) die Grundebene derselben ist folglich ein reguläres neck, dessen Mittelpunkt zugleich Fußpunkt für die Höhe der Pyramide ist. Es seien nun (Fig. 15.) xab und xbc zwei Seiten dieser Pyramide, m der Mittelpunkt der

*) Es ist dies der Fall, wenn die Ebene senkrecht auf der Linie steht, welche den Mittelpunkt des Polyeders mit der Spitze der betreffenden Ecke verbindet.

Fig. 15.



Grundebene, so daß also $\angle amb = \angle bmc = (360^{0} : n)$, und $\angle axb = \angle bxc = \alpha$ ist. Fällt man nun aus c und a zwei Senkrechten auf xb, so treffen diese denselben Punkt o in xb und sind außerdem gleich groß. Der Winkel $aoc = v$ ist aber alsdann der gesuchte Neigungswinkel. Derselbe läßt sich nun ebensowohl construiren wie berechnen.

I. Construction. Man lege die in (Fig. 15.) vorkommenden Dreiecke (d. h. ihnen ähnliche) in eine Ebene. Zunächst construire man die beiden gleichschenkligen Dreiecke amb und bmc, für welche der an der Spitze m liegende Winkel bekannt ist ($360^{0} : n$). Dadurch erhält man die Linien ab und ac. Ueber der Grundlinie ab construire man wiederum ein gleichschenkliges Dreieck axb, dessen Winkel $axb = \alpha$ ist; dadurch erhält man die Senkrechte ao. Construirt man endlich noch ein gleichschenkliges Dreieck über der Grundlinie ac, so daß jeder Schenkel gleich ao ist, so schließen die beiden Schenkel den gesuchten Winkel v ein. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus der Construction.

II. Berechnung. Da m, a, c und b in derselben Ebene liegen, und sowohl mac, wie bac gleichschenklige Dreiecke sind, so ist, wenn man m mit b durch die Linie mpb verbindet, $ap = pc$ und $\angle bpc = R$; da ferner auch oac ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist auch $\angle opc = R$, und $\angle poc = \frac{1}{2}v$.

Nun ist $\sin poc = \sin \frac{1}{2} v = \frac{pc}{oc}$.

Hierbei ist $pc = bc . \sin cbp = bc . \cos \frac{1}{2} bmc = bc . \cos \frac{180^{0}}{n}$,

daher $\sin \frac{1}{2} v = \frac{bc}{oc} . \cos \frac{180^{0}}{n} = \cos \frac{180^{0}}{n} : \frac{oc}{bc}$.

Ferner ist $\frac{oc}{bc} = \sin cbo = \cos \frac{1}{2} bxc = \cos \frac{1}{2} \alpha$,

also schließlich $\sin \frac{1}{2} v = \cos \frac{180^{0}}{n} : \cos \frac{1}{2} \alpha$.

Aus dieser Formel erhält man den Flächenwinkel:

1) des Tetraeders $= 70^{0}\ 31'\ 43{,}62''$,
2) des Hexaeders $= 90^{0}$,
3) des Octaeders $= 109^{0}\ 28'\ 16{,}38''$,
4) des Dodecaeders $= 116^{0}\ 33'\ 54{,}12''$,
5) des Icosaeders $= 138^{0}\ 11'\ 22{,}82''$.

F. Die Kugel.

§. 53. Erklärung.

Eine in sich zurücklaufende gekrümmte Fläche, deren Punkte sämmtlich von einem innerhalb liegenden Punkte gleiche Entfernung haben, heißt Kugelfläche; der von ihr begränzte Körper heißt eine Kugel. Die Ausdrücke: Mittelpunkt, Radius, Durchmesser, Secante u. s. w. bedürfen keiner neuen Erklärung.

§. 54. Lehrsatz.

Jede durch eine Kugel hindurchgehende Ebene schneidet die Oberfläche derselben in einer Kreislinie.

Beweis. Da der Mittelpunkt der Kugel von allen Punkten der Durchschnittslinie gleiche Entfernung hat, und da ferner alle diese Punkte in einer Ebene liegen, so folgt der Beweis aus §. 10, 3.

Anm. Der Durchschnitt einer Kugel und einer Ebene wird ein Kugelkreis genannt; derselbe hat zur Kugel dieselbe Beziehung, wie eine Sehne zum Kreise.

§. 55. Lehrsätze.

1) Die aus dem Kugelmittelpunkte auf einen Kugelkreis gefällte Senkrechte trifft den Kreismittelpunkt.

2) Die auf dem Mittelpunkte eines Kugelkreises errichtete Senkrechte geht durch den Kugelmittelpunkt.

3) Gleiche Kugelkreise haben gleiche Abstände vom Kugelmittelpunkte, und umgekehrt.

4) Der größere Kugelkreis liegt dem Kugelmittelpunkte näher als der kleinere, und umgekehrt.

5) Ein durch den Kugelmittelpunkt gelegter Kreis ist größer als jeder andere nicht durch diesen Punkt gehende Kreis.

Anm. 1. Die Beweise ergeben sich theils aus §. 10, theils werden sie in derselben Art geführt, wie die der entsprechenden planimetrischen Sätze, da man statt der Kreise nur ihre Radien zu berücksichtigen braucht.

Anm. 2. Der Lehrsatz 2) läßt sich benutzen, um den Kugelmittelpunkt zu finden. Errichtet man auf den Mittelpunkten zweier nicht parallelen Kugelkreise je eine Senkrechte, so schneiden sich diese Senkrechten im Kugelmittelpunkte.

§. 56. Lehrsatz.

Zwei sich schneidende Kugeln schneiden sich in einem Kreise.

Beweis. Durch drei Schneidungspunkte a, b, c lege man eine Ebene. Diese schneidet jede der beiden Kugelflächen in einer Linie, welche die um das Dreieck a b c gelegte Kreislinie ist (§. 54); sie ist folglich beiden Kugelflächen gemeinschaftlich und ist ihre Schneidungslinie.

Anm. 1. Aus diesem Satze und aus §. 55, 1) folgt, daß die Centrale senkrecht auf dem gemeinschaftlichen Kugelkreise steht. — Verlängert man den Durchmesser einer Kugel über die Kugeloberfläche hinaus und zieht von einem beliebigen Punkte desselben gleich lange Linien nach der Kugelfläche, so liegen die Treffpunkte in einer Kreislinie. Es lassen sich daher Kreise mit dem Cirkel ebenso leicht auf einer Kugel construiren, wie auf einer Ebene.

Anm. 2. Als Uebungsaufgaben lassen sich hier anknüpfen: Gerade Cylinder und gerade Kegel schneiden eine Kugelfläche in Kreislinien, wenn ihre Axen durch den Kugelmittelpunkt gehen.

§. 57. Erklärung.

Kugelkreise, deren Mittelpunkte mit dem Kugelmittelpunkte zusammenfallen, heißen größte Kreise oder Hauptkreise; die anderen heißen kleinere oder Nebenkreise. Die Linie, welche auf dem Mittelpunkte eines beliebigen Kugelkreises senkrecht steht, nennt man die Axe, und die zwei Punkte, in welchen die Kugelfläche von der Axe geschnitten wird, die Pole des Kreises. Kugelkreise, welche dieselbe Axe haben, heißen Parallelkreise, und alle Hauptkreise, welche durch die Pole dieser Parallelkreise gehen, heißen Meridiane. Der Theil einer Kugelfläche, der zwischen zwei Parallelkreisen liegt, wird Zone genannt; der von einem Kugelkreise begränzte Theil der Kugelfläche heißt Calotte oder Haube. Eine körperliche Zone ist begränzt von einer Zone und den zwei zugehörigen Parallelkreisen, ein Kugelabschnitt von einer Calotte und dem zugehörigen Kugelkreise, ein Kugelausschnitt von einer Calotte und dem Mantel eines Kegels, dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, und dessen Grundebene der Kugelkreis ist, welcher die Calotte begränzt. Die Höhe einer Zone ist der Abstand der beiden begränzenden Parallelkreise, die Höhe einer Calotte die aus dem Pole nach dem begränzenden Kugelkreise gefällte Senkrechte.

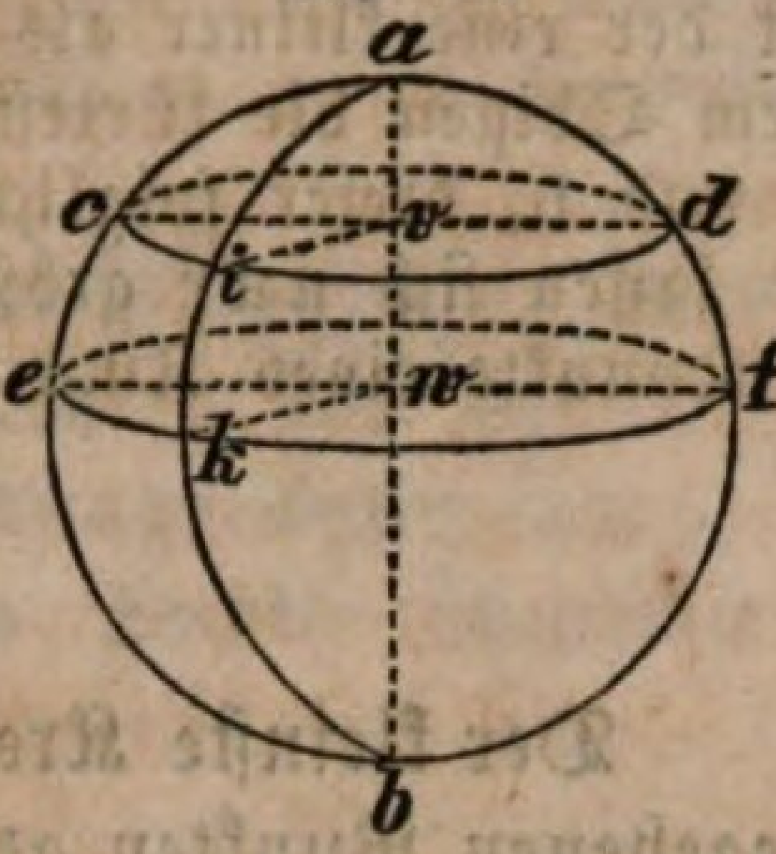
§. 58. Lehrsätze.

1) Die zwischen denselben zwei Meridianen liegenden Bogen von Parallelkreisen verhalten sich wie ihre Radien.

2) Die zwischen denselben zwei Parallelkreisen liegenden Bogen von Meridianen sind einander gleich.

Beweis zu 1). Es seien (Fig. 16.) aceb und aikb zwei Meridiane, cid und ekf zwei Parallelkreise, v und w ihre Mittelpunkte, so ist $\angle cvi = \angle ewk$, weil die Schenkel paarweise parallel sind. Da nun Bogen, welche in verschiedenen Kreisen zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehören, sich wie ihre Radien verhalten, so ergiebt sich die Proportion:

Fig. 16.



$$ci : ek = vi : wk.$$

Beweis zu 2). Die Vierecke vcew und vikw (Fig. 16.) sind congruente Trapeze. Da folglich die Sehnen ce und ik einander gleich sind, so müssen es ebenso die Bogen ce und ik, wie auch die zugehörigen Mittelpunktswinkel sein.

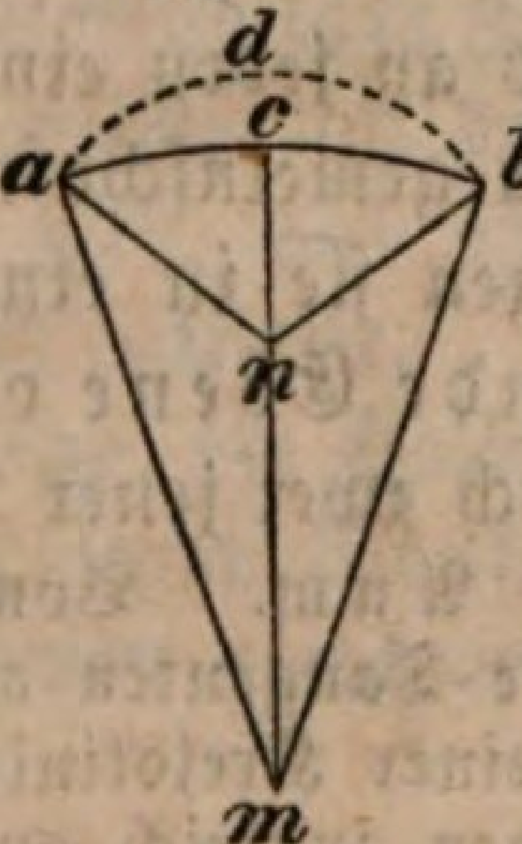
Anm. Kennt man (Fig. 16.) den Winkel iwk, so erhält man $iv = iw . \sin awi$, oder $iv = iw \cos iwk$, folglich $ci = ek . \cos iwk$. Für die Längen- und Breitengrade auf der Erde ergiebt sich daher, wenn man die Abplattung unberücksichtigt läßt, daß die Breitengrade einander gleich sind, die Längengrade aber abnehmen in dem Verhältniß der Cosinus der Breiten.

§. 59. Lehrsatz.

Ist ein von zwei beliebigen Punkten begränzter Bogen eines Hauptkreises kleiner als der halbe Umfang, so ist er kleiner als jeder von denselben Punkten begränzte Bogen eines Nebenkreises.

Beweis. Es sei (Fig. 17.) acb der Bogen des Hauptkreises, adb der des Nebenkreises; m und n seien die zugehörigen Mittelpunkte. Denkt man sich nun die Ebene adbn um die Sehne ab herumgedreht, bis sie mit der Ebene acbm zusammenfällt, bei welcher Drehung sich die Länge des Bogens adb natürlich nicht ändern kann, so muß die gebrochene Linie anb von amb umschlossen werden, da der Nebenkreis einen kleineren Radius hat, als der Hauptkreis. Alsdann ist:

Fig. 17.



$$an > am - nm, \text{ daher auch}$$
$$an > cm - nm, \text{ oder}$$
$$an > cn.$$

Der mit dem Radius na in der Ebene acbm gezogene Kreisbogen muß also den Bogen acb einschließen und die durch adb angedeutete Lage haben, folglich auch größer sein als Bogen acb.

Anm. 1. Der Bogen eines Hauptkreises ist die kürzeste Verbindungslinie auf der Kugeloberfläche für zwei gegebene Punkte. Ein auf einer Kugel liegender stark angespannter Faden folgt daher der Richtung eines Hauptkreises, ebenso ein Schiff, welches auf dem kürzesten Wege nach einem bestimmten Punkte hinsegeln will.

Anm. 2. Legt man durch zwei Punkte a und b einer Kugelfläche einen vollständigen Hauptkreis, so erhält man zwei Bogen ab. Im Allgemeinen ist der eine kleiner als der halbe Umfang, der andere größer; jener ist nach dem Obigen die kürzeste Verbindungslinie auf der Kugelfläche für die Punkte a und b, dieser folglich die längste. Sind die beiden Bogen einander gleich, so lassen sich nur größte Kreise durch a und b legen, weil diese alsdann die Endpunkte eines Kugeldurchmessers sind.

§. 60. Zusatz.

Der kleinste Kreisbogen, der auf einer Kugelfläche zwischen zwei gegebenen Punkten gezogen werden kann, heißt die sphärische Entfernung derselben, während man die zwischen beiden Punkten gezogene Sehne die geradlinige Entfernung nennt.

Anm. Da zu gleichen sphärischen Entfernungen auch gleiche geradlinige gehören, so ist man dadurch in Stand gesetzt, vermittelst des Cirkels auf einer Kugelfläche ähnliche Constructionen auszuführen, wie auf einer Ebene. Als Beispiele können die Aufgaben benutzt werden, einen gegebenen Bogen zu halbiren, zu einem gegebenen Kugelkreise die Pole zu finden.

§. 61. Erklärung.

Legt man an einen Hauptkreis (in der Ebene desselben) eine Tangente, so kann dieselbe die Kugelfläche nur in einem Punkte berühren; sie ist daher auch eine Tangente für alle die Nebenkreise, welche nur diesen einen Punkt mit dem Hauptkreise gemeinschaftlich haben. Durch denselben Punkt lassen sich aber noch unzählige andere Hauptkreise legen, und an jeden eine andere Tangente. Da nun alle diese Tangenten auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser der Hauptkreise senkrecht stehen, so liegen sie in einer Ebene, und diese Ebene ist folglich eine berührende Ebene oder Tangentialebene. Dieselbe ist ihrer Lage nach durch zwei jener Tangenten bestimmt.

Anm. Von einem Punkte außerhalb einer Kugel lassen sich unendlich viele Tangenten an dieselbe ziehen. Die Berührungspunkte liegen alsdann in einer Kreislinie, die Tangenten im Mantel eines Kegels, dessen Tangentialebenen zugleich auch die Kugel berühren. — Durch eine außerhalb einer Kugel gegebene Linie a lassen sich nur zwei Ebenen hindurchlegen, welche die Kugel berühren. Man erhält dieselben ihrer Lage nach, wenn man einen Hauptkreis construirt, dessen Ebene auf a senkrecht steht, und aus dem Punkte, in welchem a von dieser Ebene geschnitten wird, zwei Tangenten an den Hauptkreis legt: durch jede dieser Tangenten in Verbindung mit der Linie a ist eine der beiden Tangentialebenen bestimmt.

§. 62. Erklärung.

Um ein gegebenes Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn irgend ein Punkt von allen Eckpunkten des Polyeders die nämliche Ent-

fernung hat. Dies ist der Fall, wenn um jede Gränzebene des Polyeders ein Kreis beschrieben werden kann, und wenn sich die Axen aller dieser Kreise in einem Punkte schneiden. (Vergleiche §. 10, 2 und §. 55, 2.)

In ein gegebenes Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn irgend ein Punkt von allen Gränzebenen des Polyeders die nämliche Entfernung hat. Dies ist der Fall, wenn die Halbirungsebenen sämmtlicher Flächenwinkel des Polyeders sich in einem Punkte schneiden. (Vergl. §. 17, 3.)

§. 63. Zusatz.

Es läßt sich eine Kugel beschreiben:

1) in und um jedes reguläre Polyeder,

2) in und um jede dreiseitige Pyramide,

3) in und um jede reguläre Pyramide, (also auch in und um jeden geraden Kegel),

4) um jedes gerade Prisma, wenn sich um die Grundebene ein Kreis legen läßt, (also auch um jeden geraden Cylinder),

5) in jedes gerade Prisma, wenn sich in die Grundebene ein Kreis beschreiben läßt, und wenn die Höhe des Prisma gleich dem Durchmesser dieses Kreises ist, (also auch in jeden geraden Cylinder, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Grundebene ist).

Beweis zu 1). Er folgt aus §. 51.

Beweis zu 2). Um jedes der vier begränzenden Dreiecke läßt sich ein Kreis legen. Ferner schneiden sich die Senkrechten, welche auf den Mittelpunkten zweier dieser Kreise errichtet werden (§. 51), und ihr Schneidungspunkt ist daher von allen vier Ecken gleichweit entfernt.

Der zweite Theil des Satzes ergiebt sich daraus, daß die Halbirungsebenen dreier Flächenwinkel der Pyramide sich in einem Punkte schneiden müssen, der also (§. 17, 3) von allen Gränzebenen gleichweit entfernt ist.

Anm. Die Beweise für die übrigen Sätze können ihrer Leichtigkeit wegen übergangen werden.

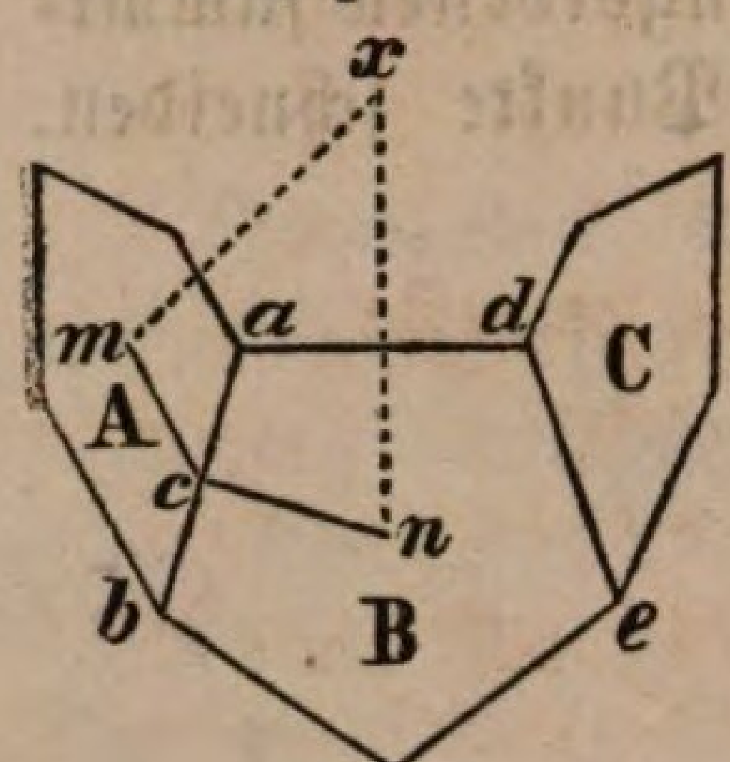
§. 64. Aufgabe.

Es sollen die Radien r und ϱ der um und in die regulären Polyeder beschriebenen Kugeln bestimmt werden.

Auflösung. Man kennt von jedem regulären Polyeder die Anzahl n der in einer Ecke zusammenstoßenden regulären Figuren und den Umfangswinkel α derselben. Aus diesen Größen erhält man aber (nach

§. 52) den Flächenwinkel v des Polyeders und ferner, wenn man die Kante des Polyeders durch s bezeichnet, auch die Radien r_1 und ϱ_1 der um und in eine Gränzebene beschriebenen Kreise (Planim. §§. 159 und 160). Legt man nun Fig. 14 und die in §. 51 gegebene Construction zu Grunde, so ist (Fig. 18.):

Fig. 18.



$$xa = xb = v;\; xm = xn = \varrho;\; \angle mcx = \frac{1}{2} r;$$

$$ma = r_1;\; mc = \varrho_1;\; ab = s.$$

Für diese Größen erhält man nun folgende Gleichungen:

1) $xa^2 = xm^2 + ma^2$, oder $r^2 = \varrho^2 + r_1^2$.

Setzt man in dieser Gleichung $xm = cm.\mathrm{tg}\, mcx$, oder $\varrho = \varrho_1 . \mathrm{tg}\, \frac{1}{2} v$, so erhält man:

2) $xa^2 = cm^2 . \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} v + ma^2$, oder $r^2 = \varrho_1{}^2 . \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} v + r_1{}^2$.

Setzt man ferner $cm^2 = ma^2 - ca^2$, oder $\varrho_1{}^2 = r_1{}^2 - \frac{1}{4} s^2$, so ergiebt sich schließlich:

3) $xa^2 = (ma^2 - ca^2)\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} v + ma^2$, oder $r^2 = (r_1{}^2 - \frac{1}{4} s^2)\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} v + r_1{}^2$.

Außerdem erhält man aus 1): $\varrho^2 = r^2 - r_1{}^2$, oder

4) $\varrho^2 = (r_1{}^2 - \frac{1}{4} s^2)\,\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} v$.

Durch die Gleichungen 3) und 4) ist die Aufgabe gelöst. Soll in denselben statt des Winkels v der Winkel α vorkommen, so erhält man aus §. 52:

5) $$\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} v = \frac{\cos^2(180^0 : n)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2(180^0 : n)}.$$

Für die einzelnen regulären Polyeder lassen sich nun die gesuchten Größen leicht aus den Gleichungen (3—5) berechnen.

I. Das Tetraeder. Es ist $r_1{}^2 = \frac{s^2}{3}$; $\alpha = 60$;*) $n = 3$;

---

*) Die Abkürzung 60 statt 60° und ähnliche in diesem §. können keinen Irrthum veranlassen.

$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}v=\frac{\cos^2 60}{\cos^2 30-\cos^2 60}=\frac{1}{4}^{*)}:\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Also ist $r^2=\left(\frac{s^2}{3}-\frac{s^2}{4}\right).\frac{1}{2}+\frac{s^2}{3}=\frac{3}{8}s^2$, folglich

$$r=\frac{s}{2}\sqrt{\frac{3}{2}};\quad \varrho=\frac{s}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}.$$

II. Das Hexaeder. Es ist $r_1{}^2=\frac{s^2}{2}$; $\alpha=R$; $n=3$;

$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}v=\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=1.$$

Also ist $r^2=\left(\frac{s^2}{2}-\frac{s^2}{4}\right)+\frac{s^2}{2}=\frac{3}{4}s^2$, folglich

$$r=\frac{s}{2}\sqrt{3};\quad \varrho=\frac{s}{2}.$$

III. Das Octaeder. Es ist $r_1{}^2=\frac{s^2}{3}$; $\alpha=60$; $n=4$;

$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}v=\frac{1}{2}:\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=2.$$

Also ist $r^2=\left(\frac{s^2}{3}-\frac{s^2}{4}\right).2+\frac{s^2}{3}=\frac{s^2}{2}$, folglich

$$r=\frac{s}{2}\sqrt{2};\quad \varrho=s\sqrt{\frac{1}{6}}.$$

IV. Das Dodecaeder. Es ist $r_1{}^2=s^2.\frac{5+\sqrt{5}}{10}$; $\alpha=108$; $n=3$;

$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}v=\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{4}.\frac{5-\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.^{**)}$$

---

*) Vergl. Einleitung zur Trigonometrie.
**) Vergl. Arithm. II., S. 16.

Also ist $r^2 = \left(s^2 . \frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{4}s^2\right) . \frac{3+\sqrt{5}}{2} + s^2 . \frac{5+\sqrt{5}}{10} =$

$= s^2 . \frac{9+3\sqrt{5}}{8}$,

$\varrho^2 = s^2\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{8} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) = s^2 . \frac{25+11\sqrt{5}}{40}$, folglich

$$r = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}};\ \varrho = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}.$$

V. Das Icosaeder. Es ist $r_1{}^2 = \frac{s^2}{3}$; $\alpha = 60$; $n = 5$;

$tg^2 \frac{1}{2} v = \left(1 - \frac{1}{4} . \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) : \left(\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{4} . \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) =$

$= \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Also ist $r^2 = \left(\frac{s^2}{3} - \frac{s^2}{4}\right) . \frac{7+3\sqrt{5}}{2} + \frac{s^2}{3} = s^2 . \frac{5+\sqrt{5}}{8}$,

$\varrho^2 = s^2 . \frac{7+3\sqrt{5}}{24}$, folglich

$$r = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}};\ \varrho = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{s}{4} . \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.\text{*)}$$

Anm. Die Auflösung kann auch ohne Hülfe der Trigonometrie auf geometrisch-algebraischem Wege gefunden werden. Sehr leicht ergiebt sie sich für das Hexaeder und Octaeder.

§. 65. Erklärung.

Schneiden sich zwei Hauptkreise auf einer Kugelfläche in den Punkten a und b, ihre Ebenen also im Durchmesser ab, so theilen diese die Kugel in vier körperliche Zweiecke, die Kugelfläche in vier Kugelzweiecke oder sphärische Winkel, und es heißen alsdann die Punkte a und b die Pole dieser Zweiecke. Die Größe

*) Vergl. Arithm. II. S. 16, II.

eines beliebigen Zweiecks hängt offenbar von dem Flächenwinkel ab, den die beiden sich schneidenden Hauptkreise bilden. Gehören nämlich zu zwei körperlichen Zweiecken gleiche Flächenwinkel, und denkt man sich das eine in das andere hineingeschoben, so müssen sich die Oberflächen in allen Punkten decken, weil alle Radien einander gleich sind, und es müssen also auch die zugehörigen Kugelzweiecke congruent sein. Folglich verhalten sich Kugelzweiecke, (oder körperliche Zweiecke), wie die zugehörigen Flächenwinkel, und sie verhalten sich zur ganzen Kugelfläche, (oder zur ganzen Kugel), wie ihre Flächenwinkel zu 4R. Da nun die Größe eines Flächenwinkels immer durch den zugehörigen Neigungswinkel ausgedrückt werden kann, so ist also ein Zweieck ausreichend bestimmt, wenn man den Neigungswinkel kennt, den die beiden sich schneidenden Hauptkreise bilden. Man erhält aber denselben am einfachsten, wenn man in einem der beiden Pole an jeden dieser Hauptkreise eine Tangente zieht.

Anm. 1. Nach der gegebenen Erklärung ist ein sphärischer Winkel ein bestimmter Theil der Kugelfläche. Da es aber in den meisten Fällen weniger auf diese Fläche ankommt, als auf den Neigungswinkel der beiden Hauptkreise, so versteht man gewöhnlich unter einem sphärischen Winkel nur den ebenen Winkel, den die im Pole an beide Hauptkreise gezogenen Tangenten bilden, und es kann daher ein sphärischer Winkel ebenso von Bogenstücken zweier Hauptkreise, wie von den Hauptkreisen selbst gebildet werden. In dem Nachfolgenden soll unter einem sphärischen Winkel immer der erwähnte Neigungswinkel verstanden werden, während da, wo die Größe der Oberfläche zu berücksichtigen ist, die Bezeichnung Kugelzweieck gebraucht werden soll. Demnach kann also z. B. gesagt werden, daß in einem Kugelzweiecke zwei gleiche sphärische Winkel einander gegenüber liegen.

Anm. 2. Stehen zwei Hauptkreise senkrecht auf einem dritten, so verhält sich der zwischen jenen Kreisen liegende Bogen des dritten zum ganzen Kreisumfange, wie der von jenen Kreisen gebildete sphärische Winkel zu 4R. Dieser Bogen kann daher ebenfalls zur Bestimmung des sphärischen Winkels benutzt werden.

§. 66. Erklärung.

Denkt man sich die Spitze eines körperlichen necks in den Mittelpunkt einer Kugel gestellt, so schneiden die Seiten desselben die Kugelfläche in Bogen größter Kreise. Diese Bogen begränzen alsdann auf der Kugelfläche ein sphärisches neck und werden Seiten desselben genannt; ihre Neigungswinkel heißen einfach Winkel des sphärischen necks.

Anm. 1. Es ergiebt sich aus dieser Erklärung und aus vorigem §, daß die Seiten und Winkel eines sphärischen necks durch dieselben Zahlen ausgedrückt werden können, wie die Seiten und Winkel des zugehörigen körperlichen necks. Wo es daher nur auf die Werthe dieser Stücke ankommt, kann man das eine für das andere setzen, und man kann also z. B., wenn

die Stücke eines sphärischen necks bestimmt werden sollen, bei der Auflösung ein körperliches neck zu Grunde legen.

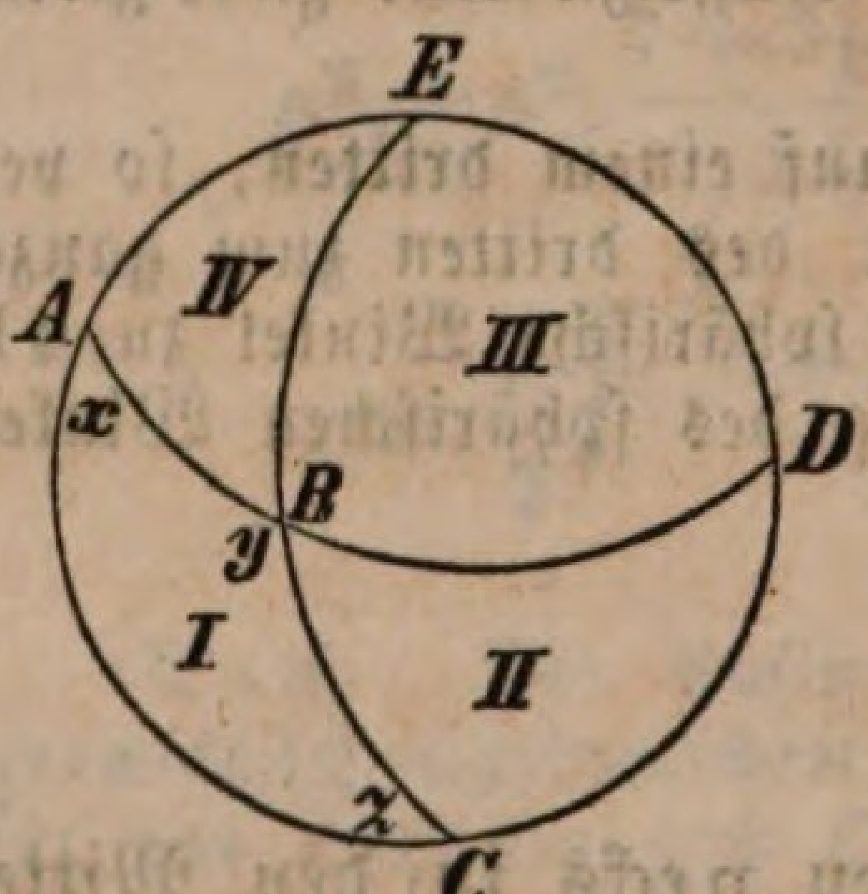
Anm. 2. Die Größe einer Seite eines sphärischen necks kann durch ihre wirkliche Bogenlänge ausgedrückt werden, wenn man außerdem den Radius kennt; einfacher ist es jedoch, nur die Größe des zugehörigen Mittelpunktswinkels anzugeben, da alsdann die Uebereinstimmung zwischen körperlichen und sphärischen necken eine vollständige ist, und man die wirkliche Bogenlänge leicht berechnen kann, wenn man den Radius kennt.

§. 67. Erklärung.

Drei Hauptkreise, welche nicht denselben Durchmesser haben, schneiden sich so, daß acht körperliche Dreiecke und eben soviel sphärische entstehen. Je zwei dieser körperlichen Dreiecke sind Scheiteldreiecke und deshalb symmetrisch. Die zugehörigen sphärischen Dreiecke stimmen folglich in allen Seiten und Winkeln überein, sind aber nicht congruent, da die Reihenfolge der einzelnen Stücke nicht die nämliche ist; man nennt sie Gegendreiecke. Jeder der drei Hauptkreise theilt also die Kugelfläche in zwei Halbkugeln der Art, daß die vier sphärischen Dreiecke der einen die Gegendreiecke von den vier sphärischen Dreiecken der anderen sind.

Die vier auf einer Halbkugel liegenden sphärischen Dreiecke stehen ebenfalls in Abhängigkeit von einander, so daß man aus den Seiten und Winkeln des einen Dreiecks die der anderen leicht bestimmen kann.

Fig. 19.



Sind nämlich (Fig. 19.) die Seiten und Winkel des Dreiecks ABC gegeben, und zwar die Seiten durch die zugehörigen Mittelpunktswinkel, so ergiebt sich für das Dreieck BDC:

1) W.BDC = x,
2) W.DBC = 2R—y,
3) W.BCD = 2R—z,
4) BD = 2R—AB,
5) DC = 2R—AC.

Für die beiden anderen Dreiecke erhält man dasselbe Resultat, daß ihre Seiten und Winkel gleich denen des Dreiecks ABC, oder gleich den Supplementen derselben sind.

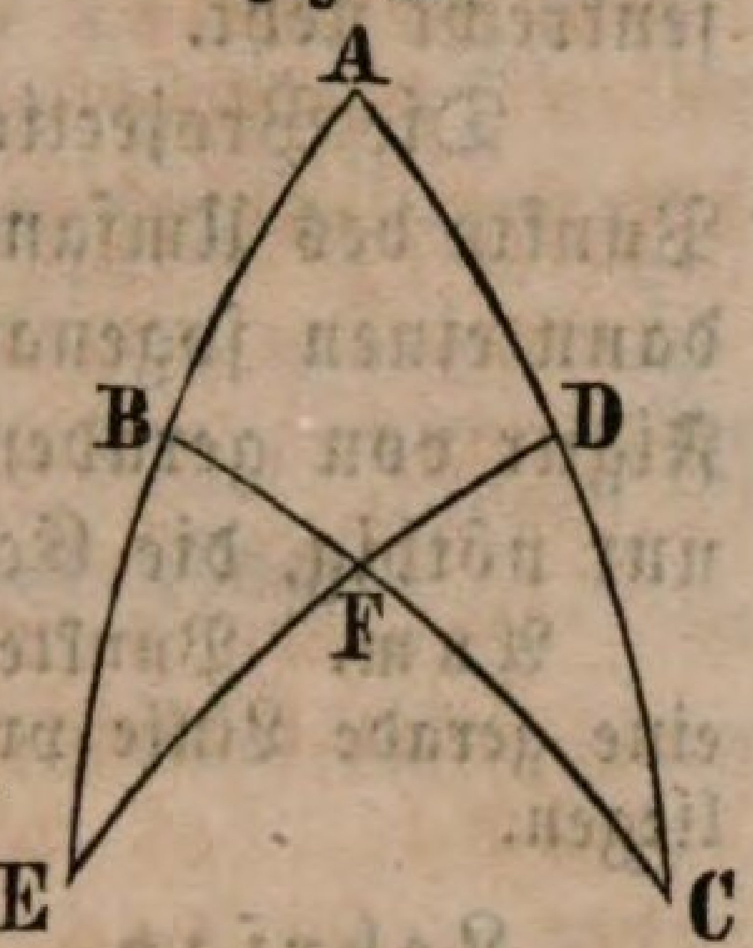
§. 68. Zusatz.

Die für die körperlichen Dreiecke aufgestellten Lehrsätze gelten auch für die sphärischen und brauchen daher nicht wiederholt zu werden. Einer besonderen Anführung bedarf aber der Lehrsatz des folgenden §.

§. 69. Lehrsatz.

Zwei sphärische Dreiecke, welche Gegendreiecke sind, haben gleiche Oberfläche.

Fig. 20.



Beweis. Legt man (Fig. 20.) die beiden Gegendreiecke ABC und ADE so aufeinander, daß zwei gleiche Winkel sich decken, so erhalten die gleichen Seiten, welche diese Winkel einschließen, (AC und AE, AB und AD) eine entgegengesetzte Lage, und es findet daher nur für das Stück ABFD eine Congruenz statt. Nun sind aber die übrig bleibenden Dreiecke FDC und FBE, die in den Winkeln übereinstimmen, ebenfalls Gegendreiecke (§. 26, Anm.), und es ist also wiederum ein Theil des einen congruent einem Theile des anderen, während die übrig bleibenden Reste Gegendreiecke sind. Daher läßt sich dasselbe Verfahren unendlich oft wiederholen, und da hierbei die Reste verschwindend klein werden, so ergiebt sich daraus die Gleichheit der Dreiecke ABC und ADE.

Anhang zu dem Bisherigen.

Von den Projectionen.

Erklärung. Nimmt man eine Ebene E an und außerhalb derselben einen Punkt a, und fällt man aus a auf E die Senkrechte aa', so nennt man a' die Projection von a auf E, aa' die projicirende Linie, E die Projectionsebene.

Die Projection einer Linie wird erhalten, wenn man sämmtliche Punkte derselben projicirt. Statt einer projicirenden Linie hat man in diesem Falle eine projicirende Ebene oder Fläche. Die Projection einer geraden Linie ist im Allgemeinen wieder eine gerade Linie, weil die projicirende Fläche eine Ebene ist, von welcher die Projectionsebene in einer geraden Linie geschnitten werden muß. Die Projection einer geraden Linie erhält man also einfach dadurch, daß man die beiden Endpunkte derselben projicirt und die erhaltenen Punkte durch eine gerade Linie verbindet. Steht eine gerade Linie senkrecht auf der Projectionsebene, so ist ihre Projection ein Punkt.

Die Projection einer gekrümmten Linie ist im Allgemeinen ebenfalls eine gekrümmte Linie; sie ist jedoch eine Gerade, wenn alle Punkte der projicirten Linie in einer Ebene liegen, die auf der Projectionsebene senkrecht steht.

Die Projection einer Figur wird erhalten, wenn man sämmtliche Punkte des Umfanges projicirt. Die projicirende Fläche bildet alsdann einen sogenannten allgemeinen Cylinder. Ist indeß eine Figur von geraden Linien begränzt, so hat man nach dem Vorigen nur nöthig, die Ecken zu projiciren.

Anm. Punkte und Linien können, wie auf eine Ebene, so auch auf eine gerade Linie projicirt werden, wenn sie mit derselben in einer Ebene liegen.

Lehrsatz. Sind zwei gerade Linien x und y einander parallel, stehen aber nicht senkrecht auf der Projectionsebene, so sind auch ihre Projectionen einander parallel.

Beweis. Da nicht nur x und y, sondern auch alle aus x und y gezogenen projicirenden Linien unter einander parallel sind, so müssen es auch die beiden projicirenden Ebenen sein (§. 4), und diese schneiden folglich die Projectionsebene in parallelen Linien.

Lehrsatz. Schneiden sich zwei Linien (in einem Punkte a), so schneiden sich auch ihre Projectionen.

Beweis. Die projicirende Linie des Schneidungspunktes a, wie auch die Projection a' desselben, ist beiden projicirenden Ebenen gemeinschaftlich, und es muß daher a' der Schneidungspunkt der beiden Projectionen sein.

Aufgabe 1. Es soll die Projection a'b' einer geraden Linie ab der Größe nach bestimmt werden.

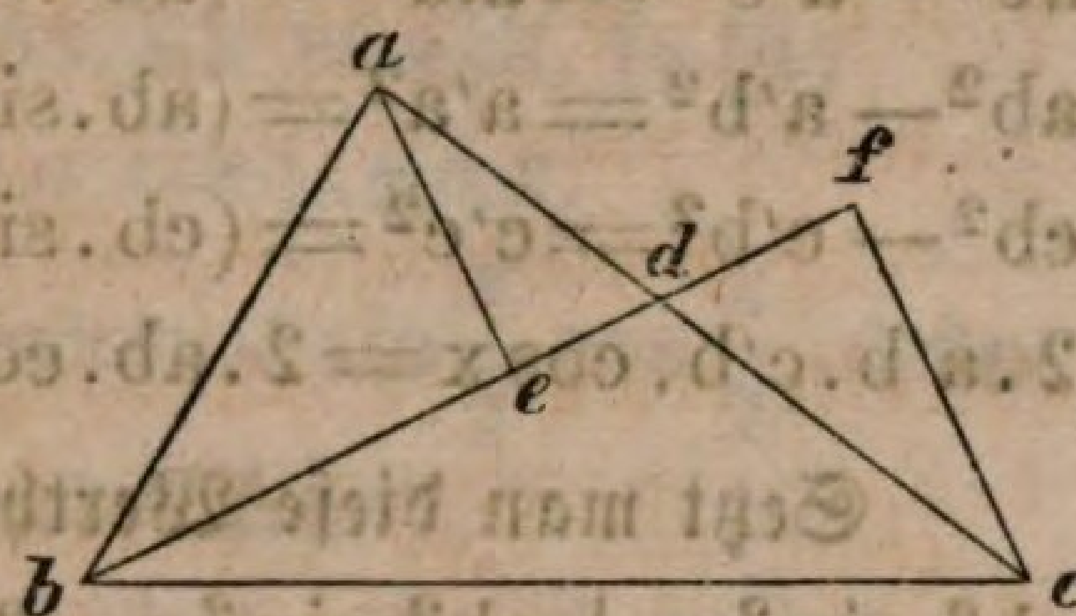
Auflösung. Ist v der Winkel, den ab mit der Projection a'b' bildet (ist also v der Neigungswinkel von ab zur Projectionsebene), so ergiebt sich unmittelbar: $a'b' = ab . \cos v$.

Anm. Ist $\cos v = 1$, also $v = R$, $ab \parallel a'b'$, so ist auch $a'b' = ab$; ist $\cos v = o$, also $v = R$, so ist $a'b' = o$. Ist also eine Linie parallel der Projectionsebene, so ist sie gleich ihrer Projection; bildet sie hingegen mit der Projectionsebene einen spitzen Winkel, so ist die Projection verkürzt und wird zuletzt gleich Null, wenn der Neigungswinkel gleich R ist. Außerdem ergiebt sich aus der gefundenen Gleichung, daß die Projectionen paralleler Linien sich verhalten wie die Linien selbst.

Aufgabe 2. Es soll die Projection a'b'c' eines Dreiecks abc der Größe nach bestimmt werden, wenn letzteres mit der Projectionsebene den Winkel v bildet.

Auflösung. Es muß sich (Fig. 21.) aus irgend einer Ecke des Dreiecks abc eine Linie parallel mit der Projectionsebene durch das Dreieck legen lassen. Ist bd diese Linie, so ist nach voriger Aufgabe bd gleich der Projection b'd'. Die Projectionen a'e' und c'f' der beiden Höhen ae und cf sind aber verkürzt, und da beide mit der Projectionsebene den Winkel v bilden, so ist $a'e' = ae . \cos v$, $c'f' = cf . \cos v$.

Fig. 21.



Hieraus ergiebt sich:

$$\triangle a'b'c' = \frac{b'd' . a'e'}{2} + \frac{b'd' . c'f'}{2} =$$

$$= \frac{bd . ae . \cos v}{2} + \frac{bd . cf . \cos v}{2} = \frac{bd . (ae + cf)}{2} . \cos v =$$

$$= \triangle\ abc . \cos v.$$

Anm. Es läßt sich die gefundene Gleichung auch auf beliebige n ecke anwenden, und es ergiebt sich, daß Figuren, die in derselben Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen, sich verhalten wie ihre Projectionen.

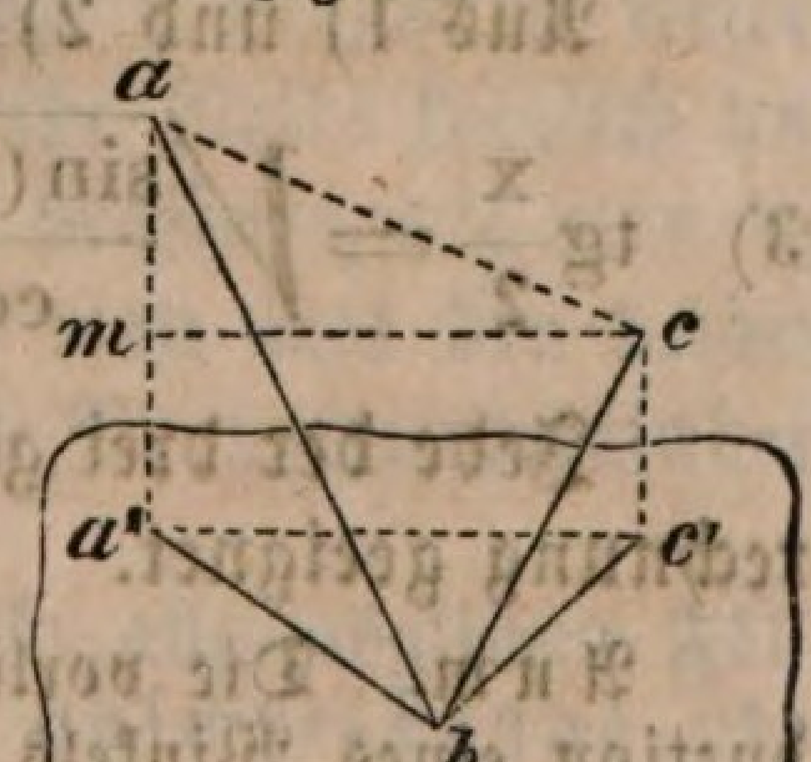
Aufgabe 3. Es soll die Projection x eines Winkels w der Größe nach bestimmt werden, wenn die Winkel p und q bekannt sind, welche die Schenkel desselben mit der Projectionsebene bilden.

Auflösung. Legt man durch den Scheitel des Winkels w eine Ebene E' parallel mit der Projectionsebene E, so haben die Größen x, p und q für E' dieselbe Bedeutung wie für E. Projicirt man daher w auf E', statt auf E, so erhält man dasselbe Resultat.

Es sei nun in Fig. 22:

$\sphericalangle abc = w$, $\sphericalangle a'bc' = x$, $\sphericalangle aba' = p$, $\sphericalangle cbc' = q$, und außerdem sei $mc \parallel a'c'$.

Fig. 22.



Man erhält alsdann:

1) $ac^2 = ab^2 + cb^2 - 2 . ab . cb . \cos w$;

2) $a'c'^2 = a'b^2 + c'b^2 - 2 . a'b . c'b . \cos x$.

Subtrahirt man 2) von 1), so ergiebt sich:

3) $ac^2 - a'c'^2 = (ab^2 - a'b^2) + (cb^2 - c'b)^2 -$

$- 2 . ab . cb . \cos w + 2 . a'b . c'b . \cos x.$

In dieser Gleichung ist aber:

$ac^2 - a'c'^2 = am^2 = (aa' - cc')^2 = (ab.\sin p - cb.\sin q)^2;$

$ab^2 - a'b^2 = a'a^2 = (ab.\sin p)^2;$

$cb^2 - c'b^2 = c'c^2 = (cb.\sin q)^2;$

$2.a'b.c'b.\cos x = 2.ab.\cos p.cb.\cos q.\cos x.$

Setzt man diese Werthe in 3) ein, so erhält man:

$$ab^2.\sin^2 p + cb^2.\sin^2 q - 2.ab.cb.\sin p.\sin q =$$

$$ab^2.\sin^2 p + cb^2.\sin^2 q - 2.ab.cb.\cos w + 2.ab.cb.\cos p \cos q \cos x,$$

oder $\quad -\sin p \sin q = -\cos w + \cos p \cos q \cos x,$

daher $\quad \cos x = \dfrac{\cos w - \sin p \sin q}{\cos p \cos q}.$

Damit dies Resultat eine zur logarithmischen Berechnung bequemere Form erhalte, setzt man:

$$1 - \cos x = 1 - \frac{\cos w - \sin p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\cos(p-q) - \cos w}{\cos p \cos q};$$ dann ist

$$1)\ \sin\frac{x}{2}^{*)} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(w+p-q)\sin\frac{1}{2}(w-p+q)}{\cos p \cos q}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin(s-q)\sin(s-p)}{\cos p \cos q}},$$ wenn man $\frac{1}{2}(w+p+q) = s$ setzt.

Ebenso kann man setzen:

$$1 + \cos x = 1 + \frac{\cos w - \sin p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\cos(p+q) + \cos w}{\cos p \cos q};$$ dann ist

$$2)\ \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \cos(s-w)}{\cos p \cos q}}.$$

Aus 1) und 2) erhält man aber:

$$3)\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-q)\sin(s-p)}{\cos s \cos(s-w)}}.$$

Jede der drei gefundenen Gleichungen ist zur logarithmischen Berechnung geeignet.

Anm. Die vorliegende Aufgabe findet eine Anwendung bei der Reduction eines Winkels auf den Horizont.

---

*) Vergl. Trigon. §§. 4 und 7.

Zusatz. Soll in Aufgabe 3. der Inhalt J' des Dreiecks a'b'c' ausgedrückt werden durch eine Gleichung, welche die Stücke des Dreiecks abc und die Winkel p und q als gegebene Größen enthält, so ist:

$$2J' = a'b.c'b.\sin x = ab.cb.\cos p.\cos q.\sin x.$$

In dieser Gleichung kann man noch $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ setzen und es durch die eben gefundenen Werthe ausdrücken.

Man kann auch, da $2J = ab.cb.\sin w$ ist, der Gleichung folgende Gestalt geben:

$$J' = J.\frac{\cos p\cos q\sin x}{\sin w}.$$

Aufgabe 4. Es soll der Winkel v bestimmt werden, den eine ebene Figur mit der Projectionsebene bildet, wenn man die Winkel w, p und q kennt, welche zwei sich schneidende Linien dieser Figur mit einander und mit der Projectionsebene bilden.

Auflösung. Dieselbe ergiebt sich leicht aus den Aufgaben 2. u. 3. Es ist nämlich nach Aufgabe 3, Zusatz:

$J' = J.\frac{\cos p\cos q\sin x}{\sin w}$, ferner nach Aufgabe 2:

$J' = J.\cos v$, folglich

$$\cos v = \frac{\cos p\cos q\sin x}{\sin w}.$$

Anm. Der Ausdruck $\sin x$ läßt sich nach Aufgabe 3. durch die gegebenen Größen w, p, q ausdrücken.

Erklärung. Soll die Aufgabe gelöst werden, aus einer gegebenen Projection die projicirte Figur zu finden, so hat man in allen Punkten der Projection senkrechte Linien auf der Projectionsebene zu errichten, wodurch man die projicirende Fläche (den Projectionscylinder) erhält. Jeder durch den Projectionscylinder gelegte Querschnitt liefert aber alsdann eine Lösung der Aufgabe, und dieselbe bleibt folglich unbestimmt. Ist jedoch eine Figur auf zwei Ebenen projicirt, die man im Allgemeinen senkrecht zu einander nimmt, so erhält man aus den beiden Projectionen, (dem Grundriß und Aufriß), zwei Projectionscylinder, deren Durchschnittslinie die gesuchte Figur liefert.

Anm. Die Lösung der erwähnten Aufgabe für alle möglichen Fälle bildet einen besonderen Zweig der Mathematik, die beschreibende oder descriptive Geometrie, und wird daher hier übergangen.

Erklärung. Die bisher beschriebene Art des Projicirens, bei welcher sämmtliche projicirende Linien einander parallel sind, nennt man

die orthographische. Sie wird vorzüglich bei Baurissen, Maschinen- und ähnlichen Zeichnungen angewendet. Eine zweite Art von Projectionen entsteht dadurch, daß man die projicirenden Linien sich in einem gegebenen Punkte schneiden läßt. Diese Linien bilden alsdann einen sogenannten allgemeinen Kegel, und die gesuchte Projection ist die Durchschnittsfigur, welche eine durch den Kegel hindurchgelegte Ebene mit demselben bildet. Diese Art des Projicirens ist Gegenstand der Perspective. Die durchschneidende Ebene kann eine verschiedene Lage haben. Sie liegt zwischen dem gegebenen Punkte und der zu projicirenden Figur, wenn man eine perspectivische Zeichnung derselben entwerfen will, d. h. eine solche, die möglichst genau denselben Eindruck hervorbringt, wie die Figur, wenn man sie von dem gegebenen Punkte aus betrachtet; sie liegt jenseits der Figur, wenn man den Schatten derselben construiren will.

Zusatz. Eine besondere Schwierigkeit bietet die Projection einer Kugelfläche, wenn sie zugleich ein anschauliches Bild liefern soll, wie dies für Himmelskarten und für geographische verlangt wird. Man bedient sich alsdann der orthographischen, oder der centralen, oder der stereometrischen Projection. Die orthographische wird am seltensten angewendet. Man benutzt sie, um z. B. die nördliche oder südliche Halbkugel auf die Ebene des Aequators zu projiciren; hierbei bilden die Projectionen der Parallelkreise wiederum Kreise, die der Meridiane aber gerade Linien. Der Nachtheil dieser Methode besteht darin, daß die in der Nähe des Aequators liegenden Länder u. s. w. zu stark verkürzt erscheinen. Bei der centralen Projection setzt man das Auge in den Mittelpunkt der Kugel und zieht von demselben gerade Linien durch alle Punkte der Kugeloberfläche bis zu einer Ebene, welche die Kugel berührt. Man wendet sie besonders bei Anfertigung der Himmelskarten an. Bei der stereometrischen Projection, die den Planiglobien zu Grunde liegt, zieht man durch die Ebene des Hauptkreises, der die abzubildende Halbkugel begränzt, von allen Punkten dieser Halbkugel gerade Linien nach dem gegenüberliegenden Pole des Hauptkreises.

Anm. Für manche Zwecke ist es wünschenswerth, auf den geographischen Karten die Parallelkreise und Meridiane als gerade, sich rechtwinklig durchschneidende Linien zu haben. In diesem Falle würden aber die Längengrade gleich groß sein, obwohl sie in Wirklichkeit nach den Polen hin kleiner werden, und die Größenverhältnisse würden daher nicht richtig sein können. Diesem Uebelstande kann man jedoch theilweise dadurch begegnen, daß man die Breitengrade nach dem Pole hin in demselben Verhältnisse wachsen läßt, in welchem die Längengrade abnehmen müßten. Es ist alsdann das Verhältniß in den Größen der Längen- und Breitengrade richtig wiedergegeben, aber die Länder in der Nähe des Poles lassen sich nicht mehr darstellen. Das eben Gesagte liegt der Projection Mercator's zu Grunde.

Viertes Capitel.

Von der Ausmessung der Körper.

A. Bestimmung der Oberfläche.

§. 70. Erklärung.

Die Oberfläche eines Körpers ist die Summe seiner Gränzflächen und ist als solche zu berechnen. Sind diese Gränzflächen völlig unabhängig von einander, so läßt sich ihre Summe auch nicht durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen, und man erhält also keine besondere Formel für die Oberfläche; dies ist hingegen der Fall, wenn die Gränzflächen einander gleich, oder wenn alle von einigen wenigen Größen abhängig sind.

§. 71. Aufgabe.

Es soll die Oberfläche eines regulären Polyeders berechnet werden, dessen Kante $= s$ ist.

Auflösung. Das Tetraeder, das Octaeder und das Icosaeder sind begränzt von regulären Dreiecken. Ist s die Seite, so ist $\frac{s}{2}\sqrt{3}$ die Höhe eines solchen Dreiecks, und $\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ der Inhalt desselben. Die Gränzebene des Hexaeders ist $= s^2$, wenn s die Seite ist. Die Gränzebene des Dodecaeders ist ein reguläres Fünfeck. Ist s die Seite desselben, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises $=$

$= \frac{s}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$,*) also der Inhalt des regulären Fünfecks $=$

$= \frac{s^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$.

---

*) Vergl. Planimetrie §. 160.

Hieraus ergeben sich folgende Resultate:

1) Die Oberfläche des regulären Tetraeders ist gleich $s^2\sqrt{3}$;
2) „ „ „ „ Octaeders „ „ $2s^2\sqrt{3}$;
3) „ „ „ „ Icosaeders „ „ $5s^2\sqrt{3}$;
4) „ „ „ „ Hexaeders „ „ $6s^2$;
5) „ „ „ „ Dodecaeders „ „

$$3s^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}.$$

§. 72. Aufgabe.

Es soll der Mantel berechnet werden:

1) eines geraden Cylinders,
2) eines geraden Kegels,
3) eines schief abgeschnittenen geraden Cylinders,
4) eines abgekürzten geraden Kegels.

Auflösung zu 1). Ist r der Radius der Grundebene, h die Seite, so ist der Inhalt des Mantels gleich $2rh\pi$ (nach §. 44). Addirt man den Inhalt jeder Grundebene ($r^2\pi$) hinzu, so ist die Gesammtoberfläche gleich $2r\pi h+2r^2\pi=2r\pi(h+r)$.

Auflösung zu 2). Ist r der Radius der Grundebene, s die Seite, so ist der Inhalt des Mantels gleich $rs\pi$ (§. 48). Addirt man den Inhalt der Grundebene ($r^2\pi$) hinzu, so ist die Gesammtoberfläche gleich $rs\pi+r^2\pi=r\pi(s+r)$.

Auflösung zu 3). Ist r der Radius der Grundebene, h die längste, h' die kürzeste Seite des Cylinders, so ist $(h-h')$ die Höhe der abgeschnittenen Klaue. Der Mantel des nicht abgeschnittenen Cylinders ist (nach 1) gleich $2rh\pi$; der Mantel der Klaue ist gleich dem halben Mantel eines Cylinders von gleicher Höhe, also gleich $r\pi(h-h')$; folglich ist der Mantel des schief abgeschnittenen geraden Cylinders gleich $2rh\pi-r\pi(h-h')=r\pi(h+h')=2r\pi\frac{h+h'}{2}$. Er ist also gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, der dieselbe Grundebene hat wie der schief abgeschnittene, aber als Seite das arithmetische Mittel zwischen der längsten und kürzesten Seite des anderen.*)

*) Die Größe der gesammten Oberfläche läßt sich nicht angeben, weil nur eine Grundebene einen Kreis bildet.

Auflösung zu 4). Ist s die Seite des abgekürzten Kegels, R der Radius der größeren, r der Radius der kleineren Grundebene, x die Seite des Ergänzungskegels, so ist der Mantel des vollständigen Kegels gleich $R\pi(s+x)$, der des Ergänzungskegels gleich $r\pi x$, also der des abgekürzten Kegels gleich $R\pi(s+x)-r\pi x=R\pi s+(R-r)\pi x$. Nun ist aber $x=\frac{rs}{R-r}$ (§. 37), folglich geht der für den Mantel gefundene Ausdruck über in $s\pi(R+r)$.

Anm. zu 4). Der Mantel eines abgekürzten geraden Kegels ist gleich einem Trapeze, dessen Höhe gleich der Seite, und dessen parallele Seiten gleich den Peripherien der Grundebenen des abgekürzten Kegels sind.

§. 73. Erklärung.

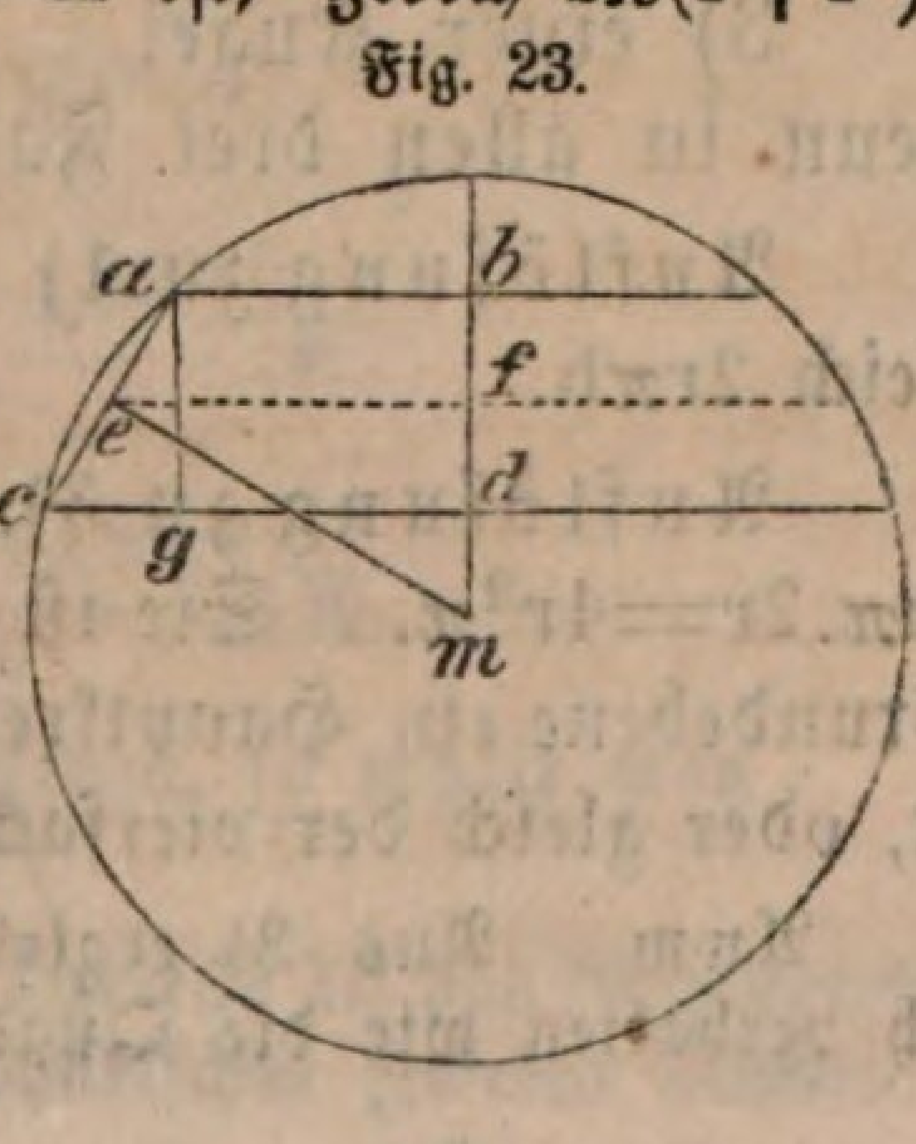
Die Berechnung einer Kugelfläche bietet dadurch eine besondere Schwierigkeit, daß man diese Fläche nicht zu einer Ebene ausbreiten kann, was aber erforderlich ist, weil nur ebene Figuren (Quadrate) als Gemäße benutzt werden. Denkt man sich aber durch Parallelkreise die Kugelfläche in unendlich viele Zonen von unendlich kleiner Höhe zerlegt, so kann man jede Zone betrachten als Mantel eines abgekürzten geraden Kegels, und unter dieser Voraussetzung ist es dann möglich, die einzelnen Zonen und die ganze Kugelfläche zu berechnen.

§. 74. Lehrsatz.

Die Oberfläche einer Kugelzone von der Höhe h ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, dessen Höhe ebenfalls h, und dessen Grundebene gleich einem Hauptkreise der Kugel ist.

Beweis. Bezeichnet man den Kugelradius durch ϱ, die Radien der beiden Parallelkreise, von welchen die Zone begränzt wird, durch r und r', so ist der Inhalt der Kugelzone, wenn man sie als eine Kegelzone betrachtet, deren Seite s und deren Höhe h ist, gleich $s\pi(r+r')$; ferner ist der Mantel des erwähnten Cylinders gleich $2\varrho h\pi$. Der Lehrsatz ist also richtig, wenn $s.\frac{r+r'}{2}=\varrho h$ ist. Es sei nun Fig. 23. ein Durchschnitt durch die Kugel, durch die Pole der Parallelkreise gehend, ferner sei $ab=r$, $cd=r'$, $ac=s$, $ag=h$.

Fig. 23.



Halbirt man nun ac und zieht durch den Halbirungspunkt e die Linie ef parallel mit ab, so ist $ef=\frac{1}{2}(r+r')$, und fällt man endlich

aus dem Kugelmittelpunkte m die Senkrechte me auf ac, so ist

$$\triangle mfe \sim \triangle cga,$$

weil $\angle mfe = \angle cga$, $\angle mef = \angle cag$ ist; (letztere haben dasselbe Complement aef).

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke folgt:

$$me : ac = ef : ag, \text{ oder}$$

$$1)\quad me : s = \frac{r+r'}{2} : h.$$

Ist nun h so klein, daß die Sehne ac und der Bogen ac, folglich auch die zugehörigen Kegel- und Kugelzonen als zusammenfallend betrachtet werden können, so ist auch $me = \varrho$, und obige Gleichung (1) geht über in:

$$2)\quad \varrho : s = \frac{r+r'}{2} : h, \text{ oder}$$

$$\varrho h = s . \frac{r+r'}{2}.$$

Der Lehrsatz ist also richtig für Kugelzonen von unendlich kleiner Höhe. Da sich aber eine Kugelzone von beliebiger Höhe in Kugelzonen von unendlich kleiner Höhe zerlegen läßt, und da für jede der letzteren der Satz richtig ist, so erhält man, wenn man die einzelnen Resultate addirt, das Endresultat, daß der Satz für jede Kugelzone gültig ist.

§. 75. Aufgabe.

Es soll die Oberfläche berechnet werden:

1) einer Kugelzone von der Höhe h,
2) einer Calotte von der Höhe h,
3) einer Kugel,

wenn in allen drei Fällen r den Kugelradius bezeichnet.

Auflösung zu 1) und 2). Die Oberfläche ist nach vorigem §. gleich $2r\pi h$.

Auflösung zu 3). Die Oberfläche ist nach vorigem §. gleich $2r\pi . 2r = 4r^2\pi$. Sie ist also gleich dem Mantel eines Cylinders, dessen Grundebene ein Hauptkreis, und dessen Höhe ein Durchmesser der Kugel ist, oder gleich der vierfachen Fläche eines größten Kreises.

Anm. Aus 3) ergiebt sich, daß die Oberflächen verschiedener Kugeln sich verhalten wie die Quadrate der Radien.

§. 76. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines sphärischen Zweiecks aus dem Kugelradius r und dem sphärischen Winkel α des Zweiecks berechnet werden.

Auflösung. Bezeichnet K die Kugelfläche, so ist nach §. 65:

$$J:K=\alpha:360^0, \text{ folglich}$$

$$J=\frac{\alpha}{360^0}.K=\frac{\alpha}{360^0}.4r^2\pi.$$

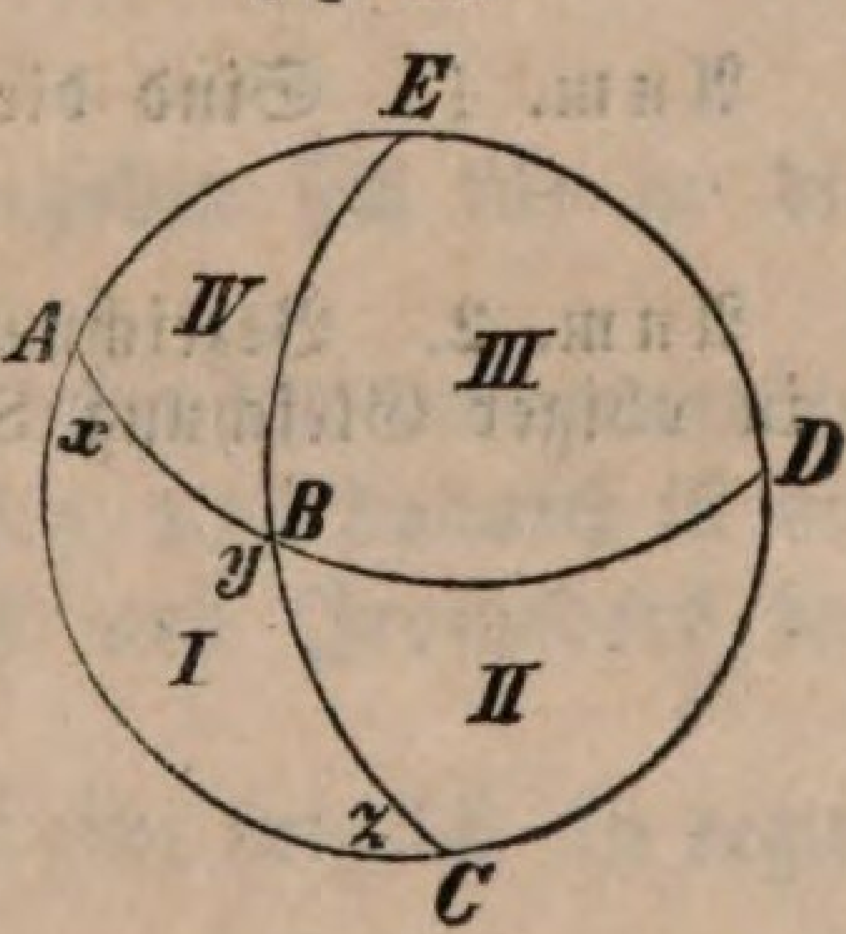
Anm. Ist α in Bogenmaaß gegeben, so ist 2π statt 360^0 zu setzen, und folglich ist alsdann $J=2\alpha r^2$.

§. 77. Aufgabe.

Es soll der Inhalt eines sphärischen Dreiecks aus dem Kugelradius r und den drei sphärischen Winkeln x, y, z des Dreiecks berechnet werden.

Auflösung. Wird Fig. 19 zu Grunde gelegt mit der dabei gegebenen Erklärung, und werden die vier sphärischen Dreiecke durch I, II, III und IV bezeichnet, hat ferner Dreieck I die drei sphärischen Winkel x, y, z, so ist (Fig. 24.) nach vorigem §.:

Fig. 24.



$$I+II=\frac{x}{360^0}.K,$$

$$I+IV=\frac{z}{360^0}.K,$$

$$I+III=^{*)}\frac{y}{360^0}.K.$$

Addirt man die erhaltenen Resultate, so ergiebt sich:

$$I+I=\frac{x+y+z}{360^0}.K-(I+II+III+IV)$$

$$=\frac{x+y+z}{360^0}.K-\tfrac{1}{2}K=\frac{x+y+z-180^0}{360^0}.K,$$

$$\text{daher } I=\frac{x+y+z-180^0}{720^0}.K.$$

Anm. Sind x, y und z in Bogenmaaß gegeben, so erhält man
$I=(x+y+z-\pi).r^2$.

*) Es ergiebt sich dies, wenn man statt des Dreiecks III das Gegendreieck nimmt (§. 69), welches mit dem Dreiecke I ein sphärisches Zweieck bildet.

§. 78. Aufgabe.

Es soll der Inhalt eines sphärischen necks aus dem Kugelradius r und den Winkeln des necks berechnet werden.

Auflösung. Aus einer Ecke ziehe man Bogen größter Kreise nach allen übrigen Ecken und zerlege so das neck in (n—2) Dreiecke. Bezeichnet man die Winkelsummen für die einzelnen Dreiecke durch s, s', s'' u. s. w., so erhält man nach vorigem §. für die Inhalte der einzelnen Dreiecke folgende Ausdrücke:

$$\frac{s-180^0}{720^0}.K,\quad \frac{s'-180^0}{720^0}.K,\quad \frac{s''-180^0}{720^0}.K, \text{ u. s. w.}$$

Der Inhalt J des sphärischen necks ist nun gleich der Summe dieser Ausdrücke, und es ist daher:

$$J=\frac{(s+s'+s''+\ldots)-(n-2)180^0}{720^0}.K, \text{ oder}$$

$$J=\frac{S-(n-2)180^0}{720^0}.K,$$

wo S die Summe $(s+s'+s''+\ldots)$, d. h. die Summe aller Winkel des sphärischen necks bedeutet.

Anm. 1. Sind die Winkel in Bogenmaaß gegeben, so ist

$$J=[S-(n-2)\pi].r^2.$$

Anm. 2. Bezeichnet v den Winkel eines regulären sphärischen necks, so ist in obiger Gleichung S = nv, daher

$$J=\frac{nv-(n-2)180^0}{720^0}.K.$$

§. 79. Zusatz.

Die am Schluß des vorigen §. gegebene Gleichung läßt sich benutzen, um die Möglichkeit der fünf regulären Polyeder zu beweisen. Kann man nämlich mit einer bestimmten Anzahl congruenter regulärer sphärischer necke die ganze Kugelfläche vollständig bedecken, so daß die Seiten und Winkel völlig aneinander schließen und nirgends einen leeren Raum lassen, so bilden die Ebenen, welche man durch sämmtliche Ecken eines jeden dieser necke legen kann, ein reguläres Polyeder. Wird nun angenommen, daß der Inhalt eines dieser regulären sphärischen necke in der Kugelfläche mmal enthalten sei, daß also das betreffende reguläre Polyeder m Gränzebenen habe, so ist

$$\frac{nv-(n-2)180^0}{720^0}.K=\frac{1}{m}K, \text{ folglich}$$

$$v=\frac{720^0}{mn}+\frac{n-2}{n}.180^0.$$

Bezeichnet ferner p die Anzahl der sphärischen necke, welche in einem Punkte zusammenstoßen, so ist die Summe der p sphärischen Winkel, welche um diesen Punkt herum den Raum völlig ausfüllen, gleich 360^0.

Es ist also $p.v=360^0$, oder

$$p.\left(\frac{720^0}{mn}+\frac{n-2}{n}.180^0\right)=360^0. \quad \text{(a)}$$

Nun kann (nach §. 49) n nur die Werthe 3, 4, 5 haben; ferner ist $p=3$, wenn n gleich 4 oder 5 ist, und p kann gleich 3, 4, 5 sein, wenn $n=3$ ist. Daraus ergeben sich folgende Resultate:

1) Ist $n=3$, so geht die Gleichung (a) über in:

$$p.\left(\frac{240^0}{m}+60^0\right)=360^0, \text{ woraus sich ergiebt:}$$

$$m=\frac{4p}{6-p}.$$

Setzt man für p die Werthe 3, 4, 5, so ergeben sich für m die Werthe 4, 8, 20.

Eine Kugelfläche kann also von 4, oder 8, oder 20 congruenten regulären sphärischen Dreiecken völlig bedeckt werden, und dadurch ist die Möglichkeit des regulären Tetraeders, Octaeders und Icosaeders bewiesen.

2) Ist (in a) $n=4$, $p=3$, so ist $m=6$; es gibt folglich ein reguläres, von Quadraten begränztes Hexaeder.

3) Ist (in a) $n=5$, $p=3$, so ist $m=12$, und es giebt also auch ein reguläres, von Fünfecken begränztes Dodecaeder.

B. Bestimmung des Inhalts.

§. 80. Erklärung.

Zwei Körper sind gleich (haben gleichen cubischen Inhalt), wenn sie sich durch Umstellung einzelner Theile in congruente Körper verwandeln lassen.

Als unmittelbare Folgerung schließt sich an, daß auch die nten Theile gleicher Körper einander gleich sein müssen, ferner auch die Körper, die sich als algebraische Summen aus gleichen Körpern darstellen lassen.

§. 81. Lehrsätze.

1) Zwei Parallelepipeda sind gleich, wenn sie gleiche Höhen und congruente Grundebenen haben.

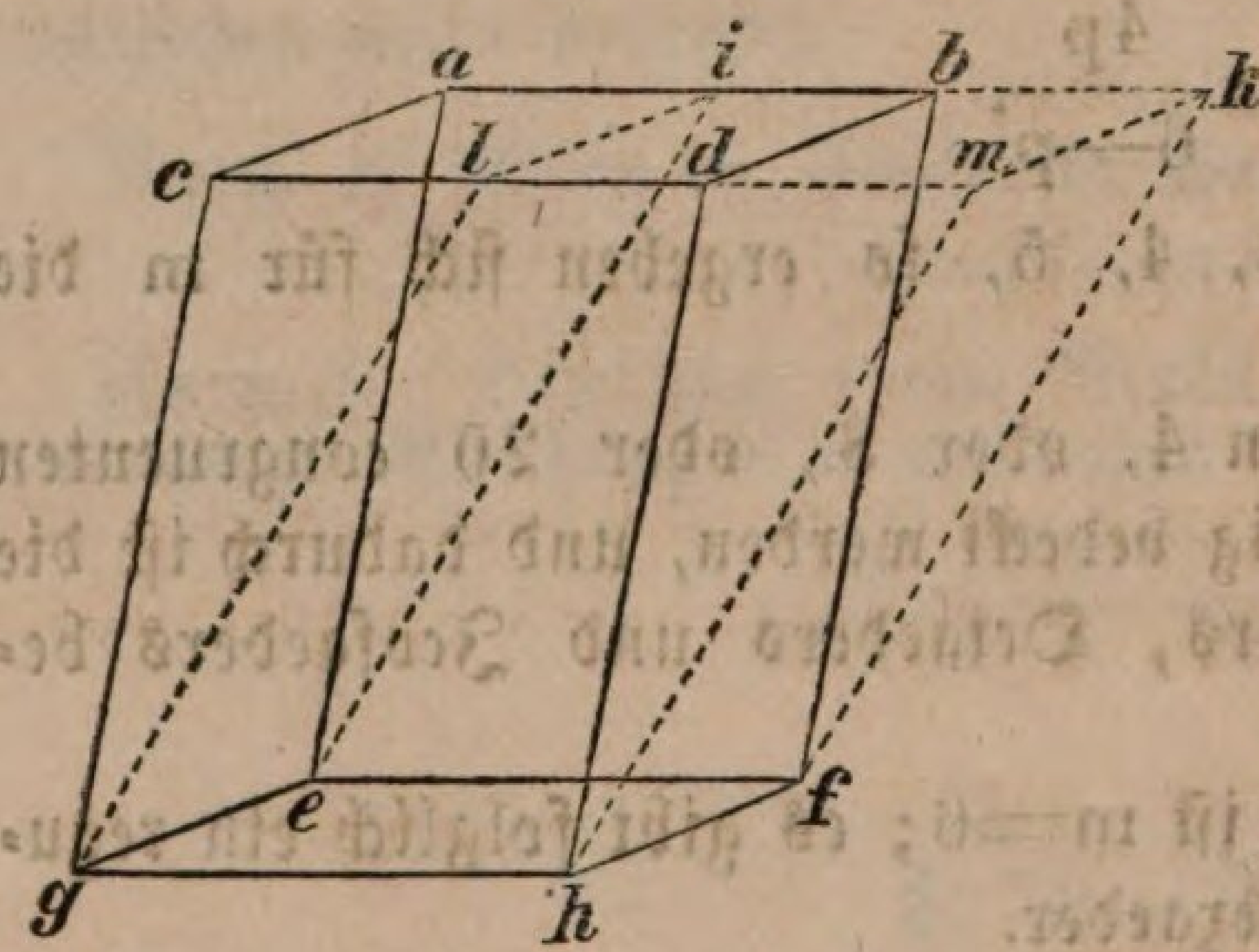
2) Zwei Parallelepipeda sind gleich, wenn sie gleiche Höhen und ferner Grundebenen von gleichen Grundlinien und Höhen haben.

3) Ein Parallelepipedum wird durch jede Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen zerlegt.

4) Zwei dreiseitige Prismen sind gleich, wenn sie gleiche Höhen und congruente Grundebenen haben.

5) Zwei Parallelepipeda, folglich auch zwei dreiseitige Prismen, sind gleich, wenn sie gleiche Höhen und gleiche Grundebenen haben.

Fig. 25.



Beweis zu 1). Schneidet man (Fig. 25.) von dem Parallelepipedum abcdefgh durch die Ebene ileg den Keil aicleg ab, so läßt sich dieser an der Seitenebene bdfh so anlegen, daß man ein neues gleich großes Parallelepipedum iklmefgh erhält, welches mit ersterem in Höhe und Grundebene, außerdem auch in einigen Flächenwinkeln übereinstimmt.

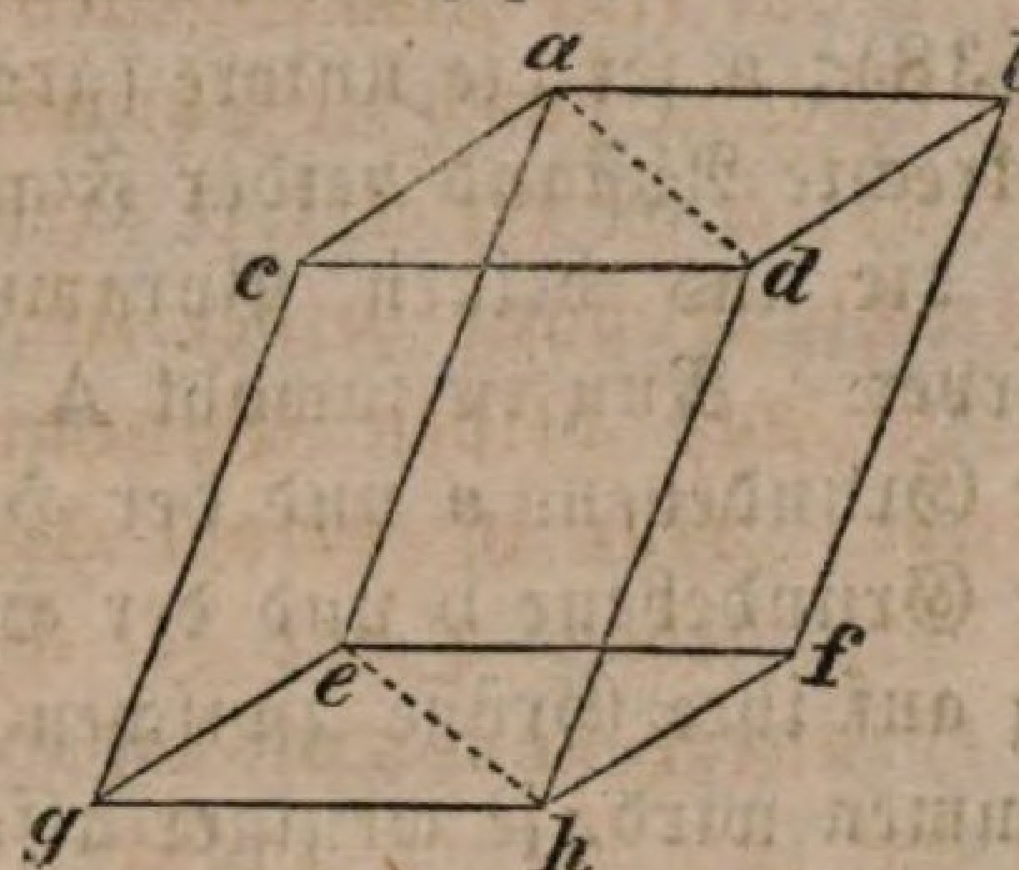
Schneidet man ferner von iklmefgh wiederum einen Keil so ab, daß die Seitenebene ikef wegfällt, und setzt diesen an der Seitenebene lmgh in entsprechender Art an, so erhält man ein drittes gleich großes Parallelepipedum, welches mit abcdefgh nur noch in Höhe und Grundebene übereinstimmt.

Sind nun zwei in Höhe und Grundebene übereinstimmende Parallelepipeda gegeben, so lassen sich dieselben durch das umgekehrte Verfahren leicht in congruente Körper verwandeln, sind also einander gleich.

Beweis zu 2). Er ergiebt sich aus 1), wenn man in Fig. 25 abef und ikef als Grundebenen der beiden Parallelepipeda nimmt, und wenn man ferner den zu 1) gegebenen Beweis benutzt.

Beweis zu 3). Der Satz ist richtig, sobald die entstehenden dreiseitigen Prismen gerade, folglich auch congruent sind.

Fig. 26.



Ist nun (Fig. 26.) das schiefe Parallelepipedum abcdefgh durch die Diagonalebene adeh in die zwei symmetrischen schiefen dreiseitigen Prismen acdegh und dbahfe zerlegt, so läßt sich jedes derselben leicht in ein gerades Prisma verwandeln. Legt man nämlich quer durch das Parallelepipedum eine auf den vier Seitenkanten senkrecht stehende Ebene, so läßt sich von jedem der beiden dreiseitigen Prisma der obere Theil so an den unteren ansetzen, daß ein gerades Prisma entsteht. Die beiden geraden Prismen sind nun congruent, und folglich sind die schiefen einander gleich.

Beweis zu 4). Er folgt unmittelbar aus 3) und 1).

Beweis zu 5). Die beiden Parallelepipeda lassen sich (nach 2) leicht so umändern, daß die beiden gleichen Grundebenen in den Winkeln übereinstimmen. Die Grundebenen lassen sich alsdann darstellen als Ergänzungen an der Diagonale (Planim. §. 83), folglich als algebraische Summen aus congruenten Dreiecken. Daher müssen sich auch die beiden Parallelepipeda darstellen lassen als algebraische Summen aus dreiseitigen Prismen, welche gleiche Höhen und beziehlich congruente Grundebenen haben, müssen also nach 4) einander gleich sein.

Daß der Satz auch für dreiseitige Prismen richtig ist, ergiebt sich aus 3).

§. 82. Lehrsatz.

Zwei prismatische Körper sind gleich, wenn sie gleiche Höhen und gleiche Grundebenen haben.

Beweis. Da nach planimetrischen Sätzen (Planim. §. 82) zwei gleiche necke sich auf gleiche Dreiecke zurückführen lassen, so ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes aus 5) des vorigen §.

Anm. Zu den prismatischen Körpern sind auch die Cylinder zu rechnen, und ein solcher kann daher gleich irgend einem Prisma sein. Nun lassen sich zwar, im strengen Sinne des Worts, ein neck und ein Kreis nicht einander gleich machen. Eine Gleichheit wird jedoch möglich, wenn die Inhalte in Zahlen gegeben werden, wobei statt der irrationalen Zahl π ein rationaler Näherungswerth gesetzt werden muß.

§. 83. Lehrsatz.

Zwei pyramidale Körper sind gleich, wenn sie gleiche Höhen und gleiche Grundebenen haben.

Beweis. Denkt man sich beide Pyramiden mit ihren Grundebenen auf eine Ebene gestellt, und legt man dann parallel mit letzterer zwei Ebenen durch die Pyramiden, so entstehen je zwei gleiche Querschnitte (§. 38); a sei die untere (größere) Durchschnittsfigur, b die obere, h der senkrechte Abstand beider Figuren von einander, und ferner seien A und A' die aus beiden Pyramiden durch jene Ebenen herausgeschnittenen Körper. Nun ist sowohl A, wie auch A', kleiner als ein Prisma von der Grundebene a und der Höhe h, hingegen größer als ein Prisma von der Grundebene b und der Höhe h, und es liegen also A und A' in Bezug auf ihre Größe zwischen denselben Gränzen. Je kleiner h angenommen wird, je weniger also a von b verschieden ist, desto näher liegen diese Gränzen, und desto kleiner ist auch der mögliche Unterschied zwischen A und A'. Für ein unendlich kleines h liegen die beiden Gränzen unendlich nahe an einander, und in diesem Falle kann man daher die beiden Größen A und A' als gleich betrachten. Denkt man sich nun beide Pyramiden auf die angegebene Art in unendlich viele Scheiben von unendlich kleiner Höhe zerlegt, so sind je zwei dieser Scheiben einander gleich, folglich auch die Pyramiden.

Anm. Zu den pyramidalen Körpern sind auch die Kegel zu rechnen.

§. 84. Zusatz.

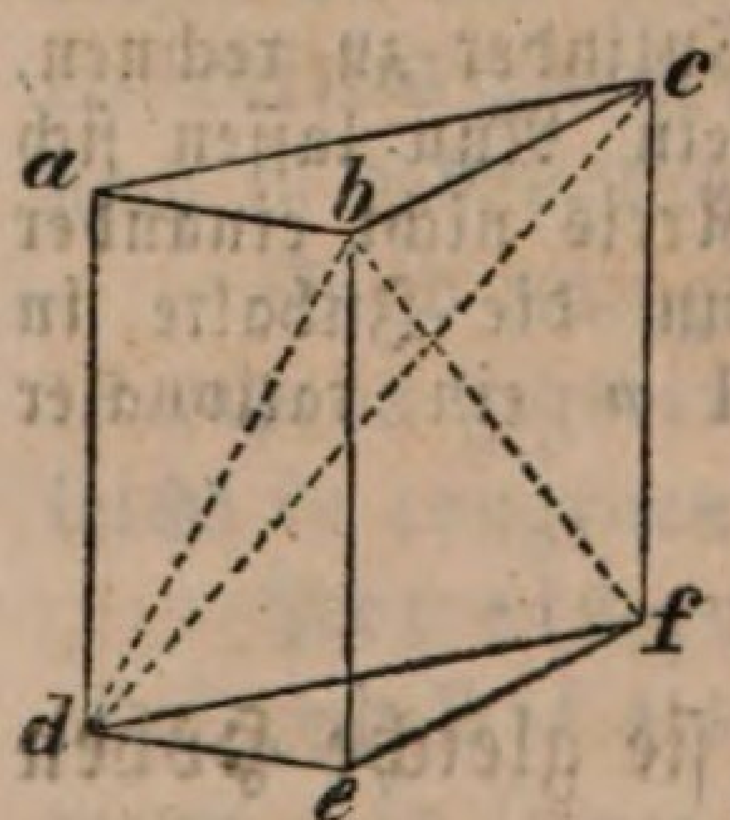
Die Lehrsätze der §§. 81—83 lassen sich zu folgendem zusammenfassen, dem Cavalieri'schen Grundsatze:

Werden zwei Körper von parallelen Ebenen stets in gleichen Figuren durchschnitten, und fangen diese Querschnitte gleichzeitig an und hören auch gleichzeitig auf, so sind die Körper einander gleich.

§. 85. Lehrsatz.

Der Inhalt eines prismatischen Körpers ist dreimal so groß als der eines pyramidalen von gleicher Grundebene und Höhe.

Fig. 27.



Beweis. Er braucht nur für dreiseitige Prismen und Pyramiden von gleichen Höhen und congruenten Grundebenen geführt zu werden, da sich nach den vorigen §§. alle anderen Fälle auf diesen zurückführen lassen. Ist nun (Fig. 27.) abcdef ein dreiseitiges Prisma, so kann man durch die Ebene bdf die dreiseitige Pyramide bdef abschneiden, welche mit dem Prisma gleiche Höhe und congruente Grundebene hat. Es bleibt übrig die vierseitige Pyramide

bacdf. Die Grundebene acdf derselben ist ein Parallelogramm, und die Pyramide wird daher durch die Ebene bdc in zwei gleich große dreiseitige Pyramiden bdca und bdcf zerlegt. Von diesen hat bdca, wenn man d als Spitze und abc als Grundebene nimmt, dieselbe Höhe und Grundebene wie das Prisma, ist also auch der zuerst abgeschnittenen Pyramide bdef gleich. Folglich sind die drei entstandenen dreiseitigen Pyramiden einander gleich, und jede ist gleich dem dritten Theile des Prisma.

§. 86. Lehrsätze.

1) Zwei Parallelepipeda, welche gleiche Grundebenen haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

2) Zwei Parallelepipeda, welche gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundebenen.

3) Zwei beliebige Parallelepipeda verhalten sich wie die Produkte aus Grundebenen und Höhen.

4) Zwei rechtwinklige Parallelepipeda verhalten sich wie die Produkte aus drei zusammenstoßenden Kanten.

5) Zwei prismatische Körper, ferner auch zwei pyramidale, verhalten sich wie die Produkte aus Grundebenen und Höhen.

Beweis zu 1). Mißt man beide Höhen mit einem gemeinschaftlichen Gemäß, und ist dieses in der einen Höhe mmal, in der andern nmal enthalten, so läßt sich das eine Parallelepipedum in m, das andere in n Parallelepipeda zerlegen, die sämmtlich einander gleich sind. Die beiden gegebenen Parallelepipeda verhalten sich daher in Bezug auf ihre Größe wie m zu n, oder, da sich beide Höhen ebenso verhalten, wie die Höhen. — Für den Fall, daß beide Höhen incommensurabel sind, vergl. Planim. §. 100.

Beweis zu 2). Werden beide Grundebenen mit einem gemeinschaftlichen Gemäß gemessen, so ergeben sich dieselben Folgerungen wie in 1).

Beweis zu 3). Die beiden Parallelepipeda seien P und P′, ihre Grundebenen G und G′, ihre Höhen h und h′. Nimmt man noch ein drittes Parallelepipedum P″ hinzu, welches mit P gleiche Höhe (h), und mit P′ gleiche Grundebene (G′) hat, so ergiebt sich:

$$P:P''=G:G' \text{ und } P':P''=h':h, \text{ also}$$
$$P:P' =(G:G'):(h':h)=Gh:G'h'.$$

Beweis zu 4). Er folgt unmittelbar aus 3).

Beweis zu 5). Er folgt aus 3) und aus den §§. 82 und 85.

Anm. zu 5). Zu den prismatischen Körpern gehören auch die Cylinder, zu den pyramidalen auch die Kegel.

§. 87. Erklärung.

Die Inhaltsbestimmungen der Körper beruhen, wie die der Flächen, auf einer Vergleichung. Ist ein als bekannt vorausgesetzter Körper K (das Gemäß) in einem anderen mmal enthalten, so wird der Inhalt des letzteren durch die benannte Zahl mK ausgedrückt. Zum Gemäß wählt man meistens einen Würfel, dessen Kante gleich irgend einer üblichen Linieneinheit ist. Die gewöhnlichsten Gemäße sind:

1) die Kubiklinie (K‴);
2) der Kubikzoll (K″) $= 12^3$ K‴ = 1728 K‴;
3) der Kubikfuß (K′) = 1728 K″;
4) die Schachtruthe = 144 K′.

Sind nun a, b, c drei zusammenstoßende Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedums, gemessen mit ein und derselben Linieneinheit, so ist der Würfel, dessen Kante gleich dieser Linieneinheit ist, in dem Parallelepipedum abcmal enthalten (§. 86,4). War also das Parallelepipedum z. B. mit der Linieneinheit „Fuß" gemessen, so ist sein Inhalt gleich abc K′. Gewöhnlich sagt man daher kurzweg: der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Produkte aus drei zusammenstoßenden Kanten oder gleich dem Produkte aus Grundebene und Höhe.

§. 88. Lehrsätze.

1) Der Inhalt eines prismatischen Körpers ist gleich dem Produkte aus Grundebene und Höhe; es ist also $J = Gh$.*)

2) Der Inhalt eines pyramidalen Körpers ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus Grundebene und Höhe; es ist also $J = \frac{1}{3}Gh$.

Beweis zu 1). Ein Prisma ist gleich einem rechtwinkligen Parallelepipedum von gleicher Grundebene G und gleicher Höhe h. Der Inhalt des Parallelepipedums ist aber nach vorigem §. gleich G.h.

Beweis zu 2). Er folgt aus 1) und aus §. 85.

Anm. Aehnliche prismatische Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen gleichliegender Linien, ebenso auch ähnliche pyramidale Körper.

§. 89. Zusatz.

1) Der Inhalt eines Cylinders ist gleich $r^2h\pi$, wenn r den Radius der Grundebene, h die Höhe des Cylinders bedeutet.

---

*) Für diesen, wie für die folgenden §§. wird vorausgesetzt, daß alle Linien ein und desselben Körpers mit demselben Gemäß gemessen sind. Die vorkommenden Buchstaben bedeuten unbenannte Zahlen, da die Hinzufügung der nöthigen Benennung in jedem Falle leicht auszuführen ist.

2) Der Inhalt eines Kegels ist gleich $\frac{1}{3}r^2h\pi$, wenn r den Radius der Grundebene, h die Höhe des Kegels bedeutet.

Anm. Die Beweise ergeben sich aus §. 88.

§. 90. Zusatz.

Jedes Polyeder, in welchem es einen Punkt giebt, der von allen Gränzebenen gleichweit entfernt ist, kann von diesem Punkte aus in Pyramiden zerlegt werden, welche die nämliche Höhe haben, nämlich die Entfernung jenes Punktes von einer der Gränzebenen (oder den Radius der eingeschriebenen Kugel). Bezeichnet man diesen Radius durch ϱ, die einzelnen Gränzebenen durch G, G′, G″ u. s. w., so erhält man für den Inhalt des Polyeders folgende Summe:

$$\frac{\varrho G}{3}+\frac{\varrho G'}{3}+\frac{\varrho G''}{3}+\ldots=\frac{\varrho}{3}(G+G'+G''+\ldots)=\frac{\varrho}{3}.O,$$

wenn O die Gesammtoberfläche bedeutet.

§. 91. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines regulären Polyeders aus seiner Kante (s) berechnet werden.

Auflösung. Nach vorigem §. ist $J=\frac{\varrho}{3}.O.$ Da nun die Werthe der Größen ϱ und O für die einzelnen regulären Polyeder in den §§. 64 und 71 gegeben sind, so erhält man

1) für das reguläre Tetraeder : $J=\frac{s^3}{12}\sqrt{2}$,

2) „ „ „ Hexaeder : $J=s^3$,

3) „ „ „ Octaeder : $J=\frac{s^3}{3}\sqrt{2}$,

4) „ „ „ Dodecaeder : $J=\frac{s^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}}=$

$$=\frac{s^3}{4}(15+7\sqrt{5}),$$

5) „ „ „ Icosaeder : $J=\frac{5s^3}{12}(3+\sqrt{5})$.

§. 92. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J einer Kugel berechnet werden.

Auflösung. Betrachtet man die Kugel als ein Polyeder von unendlich kleinen Gränzebenen, so ist die Entfernung einer solchen Gränzebene vom Mittelpunkte gleich dem Radius r. Der Inhalt der Kugel ist alsdann nach §. 90 gleich $\frac{r}{3}.O$, oder es ist $J=\frac{4}{3}r^3\pi$. (§. 75,3).

Anm. 1. Zwei Kugeln verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen ihrer Radien.

Anm. 2. Aus den §§. 89 und 92 ergiebt sich, daß ein Cylinder, eine Halbkugel und ein Kegel, wenn sie dieselbe Grundebene und Höhe haben, sich verhalten wie 3:2:1.

§. 93. Aufgaben.

Es soll der Inhalt J berechnet werden:

1) eines körperlichen Kugelzweiecks, Kugeldreiecks und eines Kugelausschnitts,

2) eines Kugelabschnitts,

3) einer körperlichen Zone,

wenn r den Kugelradius bezeichnet.

Auflösung zu 1). Man erhält den Inhalt dieser Körper, wenn man die Oberfläche eines jeden mit $\frac{r}{3}$ multiplicirt. (Vergl. §. 92.) Es ergiebt sich alsdann (vergl. §§. 75, 76, 77)

für das körperliche Kugelzweieck: $J=\frac{\alpha}{360^0}.\frac{4}{3}r^3\pi$,

" " " Kugeldreieck: $J=\frac{x+y+z-180^0}{720^0}.\frac{4}{3}r^3\pi$,

" den Kugelausschnitt : $J=\frac{2}{3}r^2h\pi$.

Auflösung zu 2). Von dem in 1) angegebenen Inhalte eines Kugelausschnitts hat man den Inhalt eines Kegels zu subtrahiren, dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, und dessen Grundebene den Kugelabschnitt begränzt. Ist h die Höhe des Kugelabschnitts, so ist (r—h) die Höhe des Kegels, und der Radius seiner Grundebene ist $\sqrt{r^2-(r-h)^2}$ $=\sqrt{2rh-h^2}$; folglich ist der Inhalt des Kegels (nach §. 89) gleich $\frac{1}{3}(2rh-h^2).(r-h)\pi=\frac{1}{3}h(2r-h)(r-h)\pi$. Für den Kugelabschnitt erhält man daher: $J=\frac{2}{3}r^2h\pi-\frac{1}{3}h(2r-h)(r-h)\pi=\frac{1}{3}h^2(3r-h)\pi$.

Auflösung zu 3). Der Inhalt einer körperlichen Zone ist gleich der Differenz zweier Kugelabschnitte. Hat der eine die Höhe H, der andere die Höhe h, so erhält man für die Zone:

$$J = \frac{\pi}{3}\,[H^2(3r - H) - h^2(3r - h)].$$

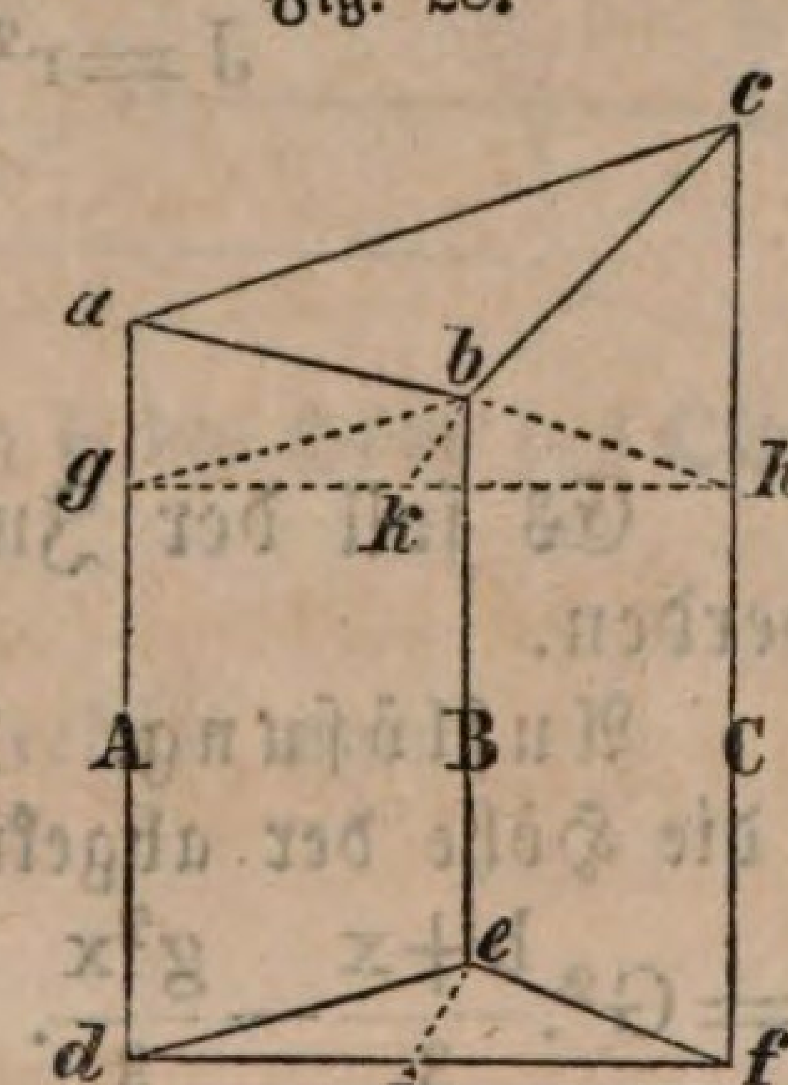
Anm. zu 2). Mit Hülfe des gewonnenen Resultates läßt sich leicht der Inhalt eines Körpers bestimmen, der zwei sich schneidenden Kugeln gemeinschaftlich ist.

§. 94. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma berechnet werden.

Auflösung. Dieselbe kann beschränkt werden auf den Fall, daß die drei Seitenkanten auf der einen Grundebene senkrecht stehen, weil sich in jedem anderen Falle das Prisma durch eine Ebene, die senkrecht auf den Kanten stände, in zwei Prismen der erwähnten Art zerlegen ließe. Ist nun (Fig. 28.) abcdef ein Prisma, dessen Seitenkanten A, B, C auf der Grundebene def senkrecht stehen, so lege man durch den Punkt b, welcher unter den drei Punkten a, b, c die kleinste Entfernung von def hat, eine Ebene gbh parallel mit def. Dieselbe zerlegt das Prisma abcdef in das gerade Prisma ghbdef und die vierseitige Pyramide bacgh, und es ist hierbei $\triangle gbh \cong \triangle def$. Sind bk = ei die Höhen dieser Dreiecke, und setzt man gh.bk = df.ei = 2E, so ist:

Fig. 28.



1) $gbhdef = E.B$;

2) $bacgh = acgh.\frac{bk}{3} = \frac{ag + ch}{2}.gh.\frac{bk}{3} = \frac{ag + ch}{3}.E.$

Hieraus folgt:

$$J = E.B + E.\frac{ag + ch}{3} = E\left(\frac{3B + ag + ch}{3}\right) =$$

$$= E\left[\frac{B + (B + ag) + (B + ch)}{3}\right] = E.\frac{A + B + C}{3}.$$

Anm. 1. Es ergiebt sich leicht, daß das gefundene Resultat auch dann noch gültig ist, wenn die Seitenebenen auf keiner der Grundebenen senkrecht stehen. Alsdann behalten A, B, C ihre Bedeutung, und E bezeichnet eine

durch das Prisma so hindurchgelegte Ebene, daß die Seitenkanten auf ihr senkrecht stehen.

Anm. 2. Ist ein Prisma nicht schief abgeschnitten, ist also $A = B = C$, so ist $J = E.A$. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man eine der Seitenebenen als Grundebene nimmt, so daß ein dachförmiger Körper entsteht, und man dann den Inhalt, ähnlich wie bei einem Dreiecke, als halbes Produkt aus Grundebene und Höhe berechnet.

Anm. 3. Der Inhalt eines schief abgeschnittenen mehrseitigen Prisma wird berechnet, indem man sich dasselbe in dreiseitige Prismen zerlegt und die einzelnen Resultate addirt. Man erhält im Allgemeinen keinen geschlossenen Ausdruck.

§. 95. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines schief abgeschnittenen Cylinders berechnet werden.

Auflösung. Ist r der Radius der Grundebene, H die Höhe des nicht abgeschnittenen Cylinders, h die Höhe der abgeschnittenen Klaue, so ist der Inhalt des nicht abgeschnittenen Cylinders gleich $r^2H\pi$, der der abgeschnittenen Klaue gleich $\frac{1}{2}r^2h\pi$. Folglich erhält man

$$J = r^2\pi . \frac{2H - h}{2} = r^2\pi . \frac{H + (H - h)}{2}.$$

§. 96. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J einer abgekürzten Pyramide berechnet werden.

Auflösung. Ist G^2 die größere, g^2 die kleinere Grundebene, h die Höhe der abgekürzten, x die der Ergänzungs-Pyramide, so ist
$$J = G^2 . \frac{h + x}{3} - \frac{g^2 x}{3}.$$

Den Werth von x erhält man aus der Proportion

$$G^2 : g^2 = (h + x)^2 : x^2, \text{ oder}$$
$$G : g = (h + x) : x, \text{ und es ist}$$
$$x = \frac{hg}{G - g}.$$

Setzt man diesen Werth ein, so ergiebt sich

$$J = \frac{G^2}{3}\left(h + \frac{hg}{G - g}\right) - \frac{g^2}{3} . \frac{hg}{G - g}, \text{ oder}$$
$$J = \frac{G^3 h - g^3 h}{3(G - g)} = \frac{h}{3}(G^2 + Gg + g^2).$$

§. 97. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines abgekürzten Kegels berechnet werden.

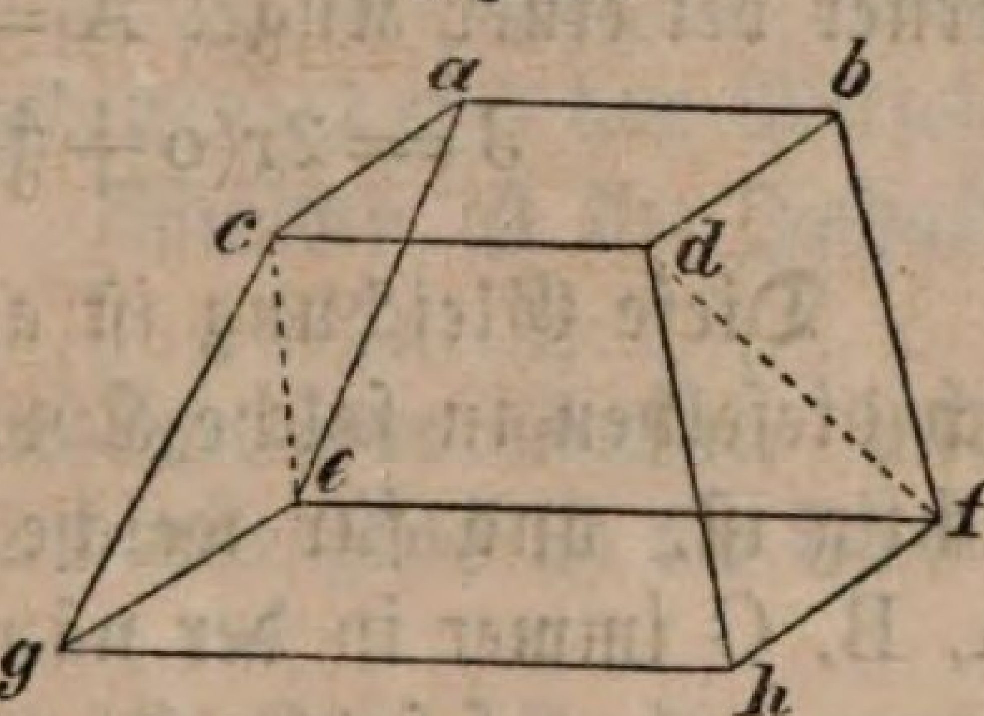
Auflösung. Ist R der größere, r der kleinere Radius, so hat man in der Auflösung des vorigen §. $R^2\pi$ statt G^2, und $r^2\pi$ statt g^2 zu setzen. Man erhält alsdann:

$$J = \frac{h}{3}(R^2\pi + \sqrt{R^2 r^2 \pi^2} + r^2\pi) = \frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

§. 98. Aufgabe.

Es soll der Inhalt J eines vierseitigen Obelisken, dessen Grundebenen Rechtecke sind, berechnet werden.

Fig. 29.



Auflösung. Da (Fig. 29.) ab, cd, ef, gh einander parallel sind, so zerlegt die Ebene cdef den Obelisken in die zwei dreiseitigen, schief abgeschnittenen Prismen acebdf und cgedhf, deren Inhalte sich nach §. 94 leicht bestimmen lassen. Legt man nämlich durch acebdf einen Querschnitt, der auf den drei Seitenkanten ab, cd, ef senkrecht steht, so ist der Inhalt dieses Querschnittes gleich $\frac{1}{2}$ac.h, wenn h die Höhe des Obelisken bezeichnet, und man erhält also:

$$acebdf = (ab + cd + ef) \cdot \frac{ac.h}{6}.$$ Ebenso erhält man:

$$cgedhf = (cd + ef + gh) \cdot \frac{eg.h}{6}.$$

Bezeichnet man nun ab und cd mit A, ac und bd mit B, ef und gh mit A′, eg und fh mit B′, so ist:

$$J = (2A + A') \cdot \frac{Bh}{6} + (2A' + A) \cdot \frac{B'h}{6} =$$

$$= \frac{h}{6}(2AB + 2A'B' + A'B + AB').$$

§. 99. Zusatz.

Die Gleichungen für den Inhalt eines prismatischen, pyramidalen und abgekürzten pyramidalen Körpers, eines Obelisken, einer Kugel, einer körperlichen Zone und Calotte lassen sich, wenn keiner dieser Körper

schief abgeschnitten ist, durch eine einzige Gleichung ersetzen, deren Richtigkeit für den einzelnen Fall leicht zu beweisen ist, obgleich der Weg, auf dem man zu der Gleichung gelangt, hier nicht weiter gezeigt werden kann. Bezeichnet nämlich A die eine Grundebene, B die andere, C einen mit A und B parallelen Durchschnitt, der durch die Mitte der Höhe h gelegt ist, und berücksichtigt man, daß bei einigen der erwähnten Körper entweder eine der beiden Größen A und B, oder auch beide zusammen gleich Null sein können, so ist der Inhalt durch folgende Gleichung gegeben:

$$J = h(\tfrac{1}{6}A + \tfrac{4}{6}C + \tfrac{1}{6}B).$$

Es ist z. B. bei einem Kegel $A = o$, $B = r^2\pi$, $C = \frac{1}{4}r^2\pi$, daher

$$J = h(o + \tfrac{4}{6}.\tfrac{1}{4}r^2\pi + \tfrac{1}{6}r^2\pi) = \frac{h}{3}.r^2\pi;$$

ferner bei einer Kugel $A = o$, $B = o$, $C = r^2\pi$, $h = 2r$, daher

$$J = 2r(o + \tfrac{4}{6}r^2\pi + o) = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

Diese Gleichung ist auch anwendbar auf beliebige Obelisken, weil sich dieselben in solche Körper zerlegen lassen, für welche die Gleichung richtig ist, und für welche bei gleicher Höhe die entsprechenden Figuren A, B, C immer in der nämlichen Ebene liegen. Die Gleichung ist aber ferner auch auf solche Körper anwendbar, die sich von den erwähnten Körpern nur dadurch unterscheiden, daß ihre Querschnitte von A und B nach C hin allmählich immer mehr und mehr von denen der anderen abweichen, also entweder immer größer, oder immer kleiner werden, doch so, daß die Abweichung im Verhältniß zur Größe der Körper nicht sehr bedeutend ist. Dergleichen Körper sind Fässer, Schiffsräume, Zonen von eiförmigen Körpern und ähnliche. Bei Körpern dieser Art ist der Inhalt entweder gar nicht, oder doch nicht mit den bis jetzt gegebenen Hülfsmitteln genau zu berechnen, aber die erwähnte Gleichung giebt ihn annähernd mit ziemlicher Sicherheit an.

Anm. Soll der Inhalt eines Körpers gesucht werden, dessen Form durch kein Gesetz bestimmt ist, so muß man sich denselben in einzelne Theile der Art zerlegt denken, daß sie als prismatische oder pyramidale Körper betrachtet und berechnet werden können. Für Körper von geringer Ausdehnung kann man sich zuweilen eines anderen Verfahrens mit Vortheil bedienen. Da ein Körper im Wasser so viel von seinem Gewichte verliert, als ein gleich großes Volumen Wasser wiegt, und da man weiß, daß 1 Kubikfuß Wasser bei 15° R. 66 Pfund wiegt, (1 Kubikcentimeter wiegt bei 4° C. 1 Gramm), so ist der gesuchte Inhalt leicht zu berechnen.

Aufgaben.

1) Welches ist der Inhalt eines 16' hohen Parallelepipedums, dessen Grundkanten 12' und 8' betragen und einen Winkel von 60° bilden?

2) Der Inhalt eines geraden Parallelepipedums beträgt 1800 K'; die Höhe beträgt 8', und die Grundebene ist ein Quadrat. Wie groß ist die Grundkante g und die Oberfläche O des Parallelepipedums?

3) Der Inhalt eines Würfels beträgt 12 K'. Wie groß ist die Seite s desselben, und wie groß die Oberfläche O?

4) Die Grundebene eines 8' hohen Prisma ist ein reguläres Dreieck mit der Seite 8'. Wie groß ist der Inhalt des Prisma?

5) Die Grundebene einer $20\frac{1}{2}$' hohen Pyramide ist ein reguläres Fünfeck mit der Seite 30'. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

6) Die Höhe einer Pyramide beträgt 10'; der Inhalt eines Querschnittes, welcher parallel mit der Grundebene durch den Mittelpunkt der Höhe geführt wird, beträgt 18 Q'. Welches ist der Inhalt der Pyramide?

7) Bei einer vierseitigen Pyramide beträgt jede Grund- und Seitenkante 6'. Wie groß ist der Inhalt, und wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

8) Eine abgekürzte 24' hohe Pyramide ist gleich ihrer Ergänzungspyramide. Wie groß ist deren Höhe?

9) Wie groß ist der Inhalt einer 15' hohen abgekürzten Pyramide, deren Grundebenen 18 Q' und 8 Q' betragen?

10) Der Inhalt einer abgekürzten Pyramide beträgt 152 K', der ihrer beiden Grundebenen 12 Q' und 27 Q'. Wie groß ist die Höhe der abgekürzten Pyramide?

11) Der Inhalt einer 6' hohen abgekürzten Pyramide beträgt 608 K', der Inhalt der einen Grundebene 64 Q'. Wie viel beträgt der Inhalt der andern Grundebene?

12) Die Höhe eines geraden Kegels beträgt 6', der Radius der Grundebene 8'. Wie groß ist die Oberfläche des Kegels?

13) Die Seite eines geraden Kegels beträgt 13', der Radius der Grundebene 5'. Wie groß ist der Inhalt des Kegels?

14) Die Höhe eines abgekürzten Kegels beträgt 15', die Radien der beiden Grundebenen betragen 10' und 8'. Wie groß ist der Inhalt des Kegels?

15) Ein Kegel soll durch drei Ebenen, welche der Grundebene parallel sind, in vier gleiche Theile getheilt werden. Wie verhalten sich die Höhen dieser Theile zu einander?

16) Ein Kegel soll durch drei Ebenen, welche der Grundebene parallel sind, in vier Theile getheilt werden, die, wenn man mit dem an der Spitze liegenden Theile beginnt, sich wie 1 : 3 : 7 : 8 verhalten. Wie verhalten sich die Höhen dieser Theile zu einander?

17) Ein abgekürzter Kegel hat die Grundebenen 25 □′ und 36 □′, ferner die Höhe 9′. Er soll durch eine Ebene E, die den Grundebenen parallel ist, in zwei gleiche Theile getheilt werden. Wie groß sind die Höhen h und h′ dieser zwei Theile, wie groß der Inhalt eines jeden derselben, und wie groß der Querschnitt E?

18) Die Radien der Grundebenen eines abgekürzten geraden Kegels betragen 9′ und 21′, die Seite des Ergänzungskegels ist gleich 8′. Wie groß ist der Mantel des abgekürzten Kegels?

19) Der Inhalt eines 10′ hohen geraden Kegels beträgt 1047,197...K′. Wie groß ist der Mantel des Kegels?

20) Ein gerader Kegel hat den Inhalt 314,159...K′ und die Gesammtoberfläche 282,743... □′. Wie groß ist die Höhe h des Kegels, und wie groß der Radius r der Grundebene?

21) Ein gerader Kegel hat den Inhalt 301,5927...K′, und die Größe des Mantels beträgt 188,4954...□′. Wie groß ist die Höhe h des Kegels, die Seite s desselben, und der Radius r der Grundebene?

22) Bei einem 23,3′ hohen Cylinder beträgt der Radius der Grundebene 18′. Wie groß ist der Inhalt des Cylinders?

23) Der Mantel eines geraden Cylinders beträgt 75,3981... □′, die Grundebene 2827,432...□′. Wie groß ist der Inhalt des Cylinders?

24) Der Mantel eines geraden Cylinders beträgt 263,893...□′, der Inhalt des Cylinders 791,68... K′. Wie groß ist die Grundebene?

25) Die Grundebene eines geraden Cylinders beträgt 50,2654... □′, der Inhalt des Cylinders 301,592...K′. Wie groß ist der Mantel?

26) Die Gesammtoberfläche eines geraden Cylinders beträgt 320,693...□′, die Summe der Seite und des Radius der Grundebene beträgt 23,2′. Wie groß ist der Inhalt des Cylinders?

27) Bei einem schief abgeschnittenen geraden Cylinder beträgt die größte Seite 18,3′, die kürzeste 16,7′; der Radius der Grundebene beträgt 8,3′. Wie groß ist der Inhalt des Cylinders?

28) Bei einem geraden Cylinder ist die Höhe h gleich 9′, der Radius r der Grundebene gleich 12′. Ein zweiter gerader Cylinder hat dieselbe Gesammtoberfläche und denselben Inhalt, ist aber ersterem nicht congruent. Wie groß ist bei diesem Cylinder die Höhe h′ und der Radius r′?

29) Durch einen 25' hohen Cylinder, bei welchem der Radius der Grundebene 4' beträgt, wird eine Ebene hindurch gelegt, parallel mit der Axe und 2' von dieser entfernt. Wie groß ist der Inhalt des durch die Ebene abgeschnittenen kleinern Stücks?

30) Der Radius einer Kugel beträgt 11,5'. Wie groß ist die Oberfläche, und wie groß der Inhalt der Kugel?

31) Der Inhalt einer Kugel beträgt 19861,7... K'. Wie groß ist die Oberfläche der Kugel?

32) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 1411,95... Q'. Wie groß ist der Inhalt der Kugel?

33) Die Höhe einer Calotte beträgt 2,1'; der Kugelhalbmesser beträgt 6,4'. Wie groß ist der Flächeninhalt O der Calotte, und wie groß ist der Inhalt J des zugehörigen Kugelabschnittes?

34) Der Radius des Kreises, der eine 4,5' hohe Calotte begränzt, beträgt 6,11146'... Wie groß ist der Flächeninhalt O der Calotte, und wie groß ist der Inhalt J des zugehörigen Kugelabschnittes?

35) Die Radien der Kreise, welche eine 2,1' hohe Kugelzone begränzen, betragen 9,4599...' und 10,2995...'. Wie groß ist der Flächeninhalt O der Zone, und wie groß ist der Inhalt J der körperlichen Zone?

36) Von den zwei Kreisen, welche eine 1,4' hohe Kugelzone begränzen, hat der größere den Radius 6'; der Kugelradius beträgt 6,5'. Wie groß ist der Flächeninhalt O der Zone, und wie groß der Inhalt J der körperlichen Zone?

37) Wie groß ist der Flächeninhalt der vom 60sten Parallelkreise auf der Erdoberfläche begränzten Calotte, wenn man die Erde als vollkommene Kugel betrachtet und ihren Radius zu 858 Meilen annimmt?

38) Wie groß ist unter denselben Voraussetzungen der Flächeninhalt der Zone, welche von dem 60sten und 50sten Parallelkreise begränzt wird?

39) Für ein sphärisches Dreieck sind die Winkel gegeben: $A=134^{0}30'$; $B=116^{0}20'$; $C=106^{0}40'$; der Kugelradius beträgt 112'. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

Auflösungen.

1) 1330,2... K'; 2) g=15'; O=930 Q'; 3) s=2,2894...'; O=31,448... Q'; 4) 221,7... K'; 5) 10580,9... K'; 6) 240 K'; 7) J=50,911... K'; O=98,353... Q'; 8) 92,3357...'; 9) 190 K'; 10) 8'; 11) 144 Q'; 12) 452,389... Q'; 13) 314,159... K';

14) 3832,74... K'; 15) Wie $1:\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1}\right):\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right):\left(\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{3}\right)$, oder wie 1 : 0,25992... : 0,18232... : 0,14525... ; 16) Wie $1:\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{1}\right):\left(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\sqrt[3]{19}-\sqrt[3]{11}\right)$, oder wie 1 : 0,58740... : 0,63657... : 0,44442...; 17) h=4,9057...; h'=4,0942...'; E=30,747... Q'; J=136,5... K'; 18) 1005,3... Q'; 19) 444,288... Q'; 20) r=5'; h=12', oder r=4,4721...'; h=15';*) 21) h=8'; s=10'; r=6'; oder h=8,6580...'; s=10,4031...'; r=5,7674....';**) 22) 23716,5... K'; 23) 1130,97... K'; 24) 113,097... Q'; 25) 150,796... Q';

---

*) Die allgemeine Lösung erhält man in folgender Weise: Ist J der Inhalt, O die Gesammtoberfläche, so ist:

$$1)\ 3J = r^2\pi h; \qquad 2)\ O = r\pi\sqrt{r^2+h^2}+r^2\pi.$$

Aus 2) erhält man $O^2-2Or^2\pi=r^2\pi^2h^2$, oder, wenn man nach 1) $r^2\pi = (3J:h)$ setzt,

$$O^2-2O.\frac{3J}{h}=3J\pi h, \text{ oder}$$

$$h^2-\frac{O^2}{3\pi J}.h=-\frac{2O}{\pi}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man h; aus dem für h gefundenen Werthe und aus 1) erhält man r.

**) Die allgemeine Lösung erhält man in folgender Weise: Ist J der Inhalt des Kegels, O der Flächeninhalt des Mantels, so ist:

$$1)\ 3J=r^2\pi h; \quad 2)\ O=r\pi\sqrt{h^2+r^2} \text{ oder } O^2=r^2\pi^2h^2+r^4\pi^2.$$

Aus 1) erhält man $r^2=(3J:\pi h)$. Setzt man diesen Werth in 2) ein, so ergiebt sich

$$3)\ O^2=3J\pi h+\frac{9J^2}{h^2}, \text{ oder}$$

$$4)\ 3J\pi h^3-O^2h^2+9J^2=o.$$

Aus dieser Gleichung erhält man drei Werthe für h, von denen indeß der eine negativ sein muß und daher für die vorliegende Aufgabe nicht brauchbar ist.

26) 319,311...K'; 27) 3787,42...K'; 28) h'=36'; r'=6';*) 29) 245,673...K'; 30) O=1661,9...Q'; J=6370,62...K'; 31) 3546,73...Q'; 32) 4988,87...K'; 33) O=84,446...Q'; J=78,970...K'; 34) O=180,955...Q'; J=311,724...K'; 35) O=141,183...Q'; J=649,97...K'; 36) O=57,17...Q'; J=140,069...K'; 37) 619693 Quadratmeilen; 38) 462457 Quadratmeilen; 39) 38860,8...Q'.

Fünftes Capitel.

Sphärische Trigonometrie.

§. 100. Erklärung.

Die Seiten und Winkel eines sphärischen (körperlichen)**) Dreiecks stehen ebenso in Abhängigkeit von einander, wie die eines ebenen Dreiecks. Diese Abhängigkeit nachzuweisen, ist die nächste Aufgabe der sphärischen Trigonometrie.

---

*) Die allgemeine Lösung erhält man in folgender Weise: Ist J der Inhalt des Cylinders, O die Gesammtoberfläche, so ist:

$$1)\ J = r^2\pi h; \qquad 2)\ O = 2r^2\pi + 2r\pi h.$$

Aus 1) ergiebt sich $r\pi h = (J:r)$. Setzt man diesen Werth in 2) ein, so erhält man

$$3)\ O = 2r^2\pi + \frac{2J}{r}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man drei Werthe für r, von denen aber der eine negativ sein muß und daher nicht brauchbar ist. Sobald indeß, wie in Aufgabe 28), der eine Werth von r gegeben ist, also z. B. r=a, so ist obige Gleichung 3) durch (r—a) theilbar, und man hat dann nur noch eine quadratische Gleichung zu lösen.

**) Ueber den Zusammenhang zwischen körperlichen und sphärischen Dreiecken vergl. §. 66, Anm. 1.

In den nachfolgenden §§. sollen die Seiten eines sphärischen Dreiecks mit a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C, die Scheitelpunkte derselben mit A', B', C' bezeichnet werden, und es sei jeder Winkel und jede Seite kleiner als 2R. (Vergl. §. 20, Anm. 2.)

§. 101. Lehrsatz.

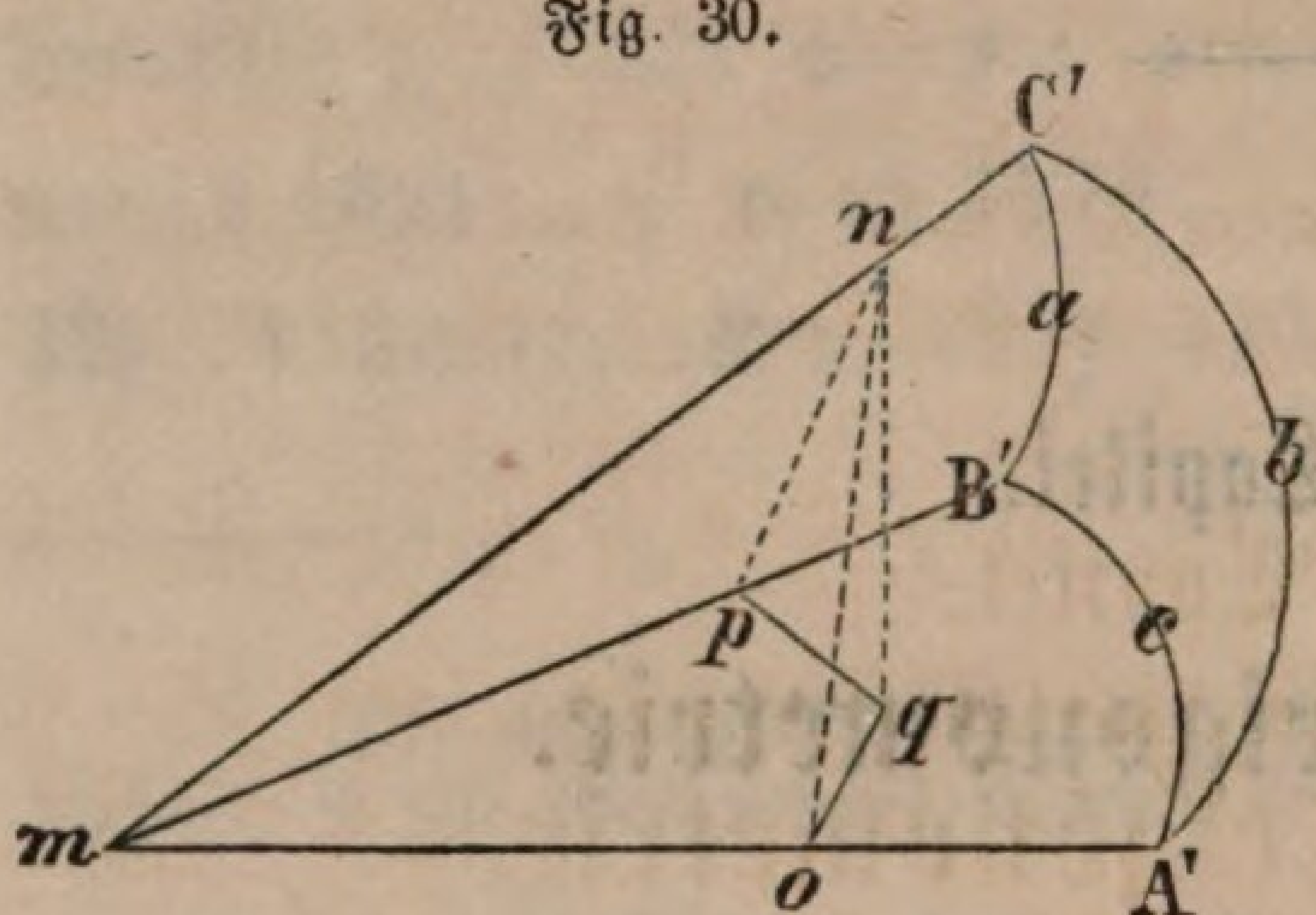
Für jedes sphärische Dreieck gelten folgende Gleichungen:

1) $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$;

2) $\sin A : \sin C = \sin a : \sin c$;

3) $\sin B : \sin C = \sin b : \sin c$.

Fig. 30.



Beweis zu 1). Es sei (Fig. 30.) A'B'C' ein sphärisches Dreieck, mA'B'C' das zugehörige körperliche. Man fälle nun aus einem beliebigen Punkte n der Kante mC' die Senkrechte nq auf die Ebene der Seite c, und es werde angenommen, daß der Punkt q inmitten der Ebene mB'A' liege. Fällt man ferner aus q die Senkrechten qp und qo auf mB' und mA', und verbindet man o und p mit n, so sind $\angle noq$ und $\angle npq$ die Neigungswinkel von A und B. Alsdann ist $\sin A = nq : no$, $\sin B = nq : np$, daher

1) $\sin A : \sin B = np : no$.

Nun ist $np = mn . \sin a$, $no = mn . \sin b$, also

2) $np : no = \sin a : \sin b$.

Aus den beiden Gleichungen 1) und 2) ergiebt sich aber schließlich

$\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$.

Anm. Die Beweise zu 2) und 3) werden ebenso geführt.

§. 102. Zusatz.

Der im vorigen §. erwähnte Punkt q kann auch in einer der beiden Kanten mA' und mB' liegen, oder er kann mit m zusammenfallen, oder er kann außerhalb des körperlichen Dreiecks in der Fortsetzung der Ebene B'mA' liegen.

Liegt q in der Kante mA', so fällt es mit o zusammen. Setzt man nun in dem gegebenen Beweise $nq = no$, so kann das Uebrige unverändert bleiben.

Fällt q mit m zusammen, so steht die Kante C'm senkrecht auf der Ebene mA'B', und es ist alsdann A=R und B=R. Ferner sind aber auch in diesem Falle a und b Viertelkreisbogen, folglich ist a=b==R.*) Schließlich ist also ebenfalls sin A : sin B = sin a : sin b.

Liegt q in der Fortsetzung der Ebene mA'B', so denke man sich die Seiten des körperlichen Dreiecks zu Ebenen von Hauptkreisen erweitert, das sphärische Dreieck A'B'C' zur Kugeloberfläche. Auf jeder Seite des zu c gehörigen Hauptkreises liegen alsdann 4 sphärische und ebensoviel körperliche Dreiecke. (Vergl. §. 67.)

In irgend einem der 4 körperlichen Dreiecke, die nach Fig. 30 oberhalb des zu c gehörigen Hauptkreises liegen, muß nun der Punkt q zu finden sein, entweder in einer Seite, oder in einer Kante, und für dieses Dreieck ist also der Satz richtig. Da aber in den übrigen Dreiecken die Winkel und Seiten dieses einen Dreiecks sich wiederholen, oder deren Supplemente (§. 67), und da sin x = sin(2R—x) ist, so gilt der Satz auch für diese Dreiecke.

Der Lehrsatz des §. 100 ist folglich für jedes sphärische Dreieck richtig.

Anm. Aus diesem Lehrsatz ergiebt sich leicht die Richtigkeit der in §. 22 aufgestellten Lehrsätze.

§. 103. Lehrsatz.

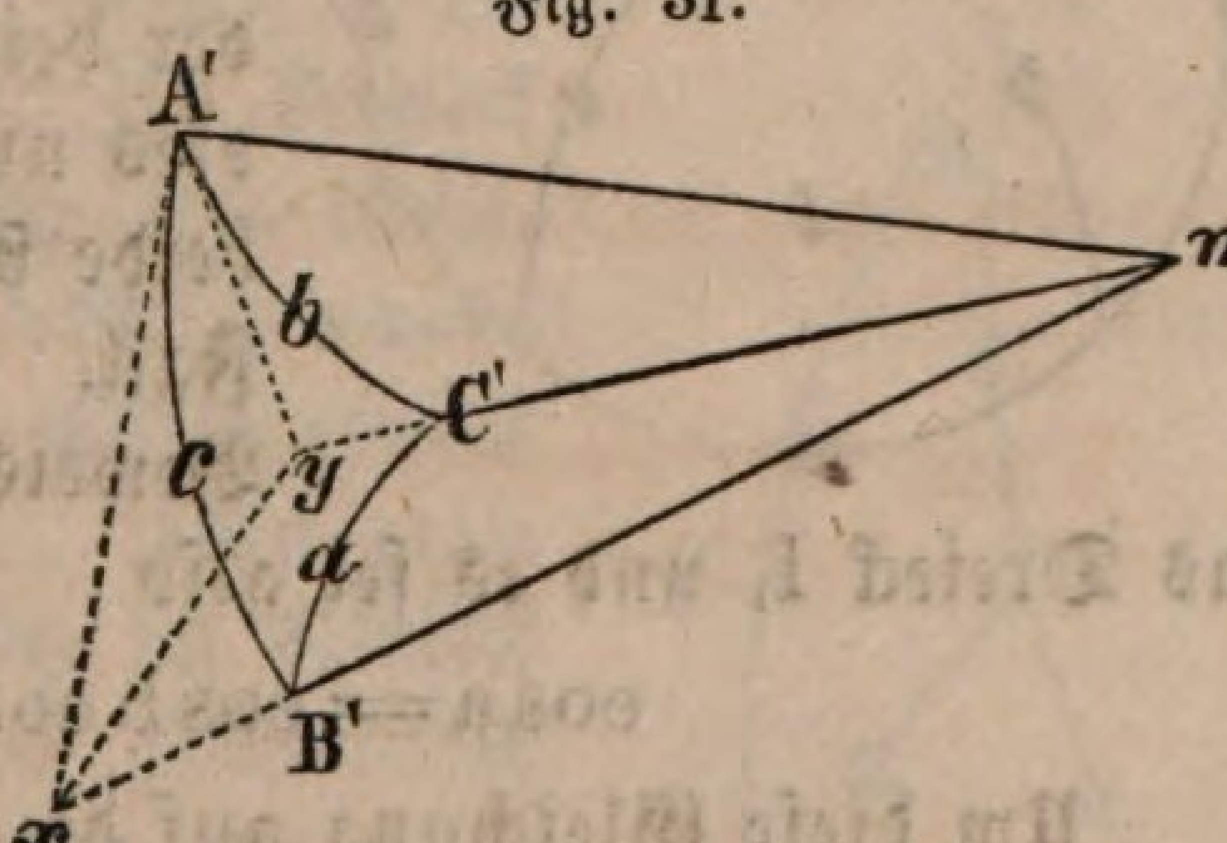
Für jedes sphärische Dreieck gelten folgende Gleichungen:

1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$;

2) $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$;

3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$.

Fig. 31.



Beweis zu 1). Es sei (Fig. 31.) A'B'C' ein sphärisches Dreieck, mA'B'C' das zugehörige körperliche, und es seien b und c spitze Winkel. Zieht man nun im Punkte A' an b und c je eine Tangente und verlängert dieselben, bis sie in y und x von den verlängerten Radien mC' und mB' getroffen werden, so lassen sich, wenn der Radius gleich 1 gesetzt wird, die verschiedenen Linien in folgender Weise bezeichnen. Es ist:

$$A'y = \operatorname{tg} b;\quad A'x = \operatorname{tg} c;\quad my = \sec b;\quad mx = \sec c.$$

*) Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß a, b, c ebenso durch Grad wie durch Bogenmaaß ausgedrückt werden können.

Berücksichtigt man außerdem, daß $\sphericalangle xA'y = A$ ist, so ergiebt sich

1) im Dreieck $xA'y$:

$$xy^2 = tg^2 b + tg^2 c - 2\, tg\, b\, tg\, c \cos A;$$

2) im Dreieck ymx:

$$xy^2 = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \sec c \cos a.$$

Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweiten und setzt dabei $\sec^2 b = 1 + tg^2 b$, $\sec^2 c = 1 + tg^2 c$, so erhält man:

$$o = 2 - 2 \sec b \sec c \cos a + 2\, tg\, b\, tg\, c \cos A,$$

$$= 2 \cos b \cos c - 2 \cos a + 2 \sin b \sin c \cos A,$$

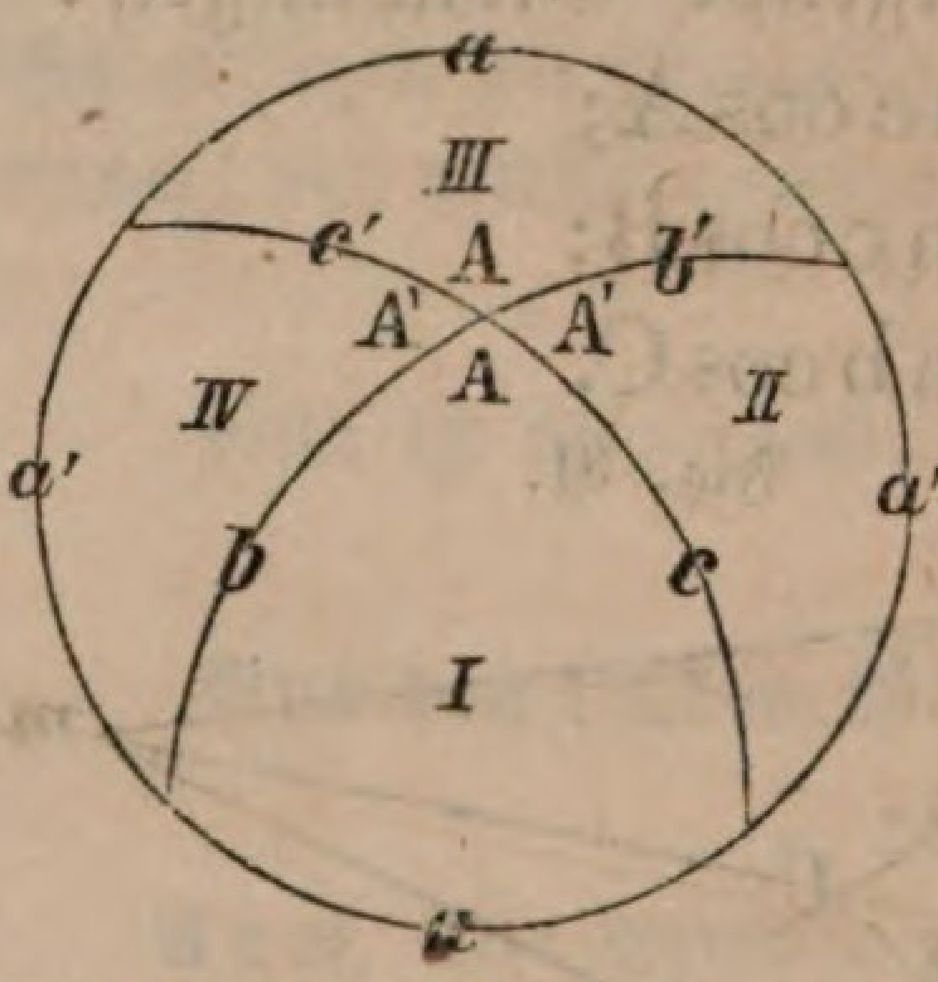
daher $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Anm. Die Beweise zu 2) und 3) werden in derselben Art geführt.

§. 104. Zusatz.

Ist in §. 103 einer der beiden Winkel b und c stumpf, oder sind es beide, so nimmt man wieder, wie in §. 102, die drei sphärischen Dreiecke zu Hülfe, welche mit dem gegebenen zusammen eine Halbkugel bilden. Ist nun (Fig. 32.) das Dreieck I das gegebene, und werden in den übrigen die gleichen Stücke mit gleichen Buchstaben, die Supplemente von a, A u. s. w. durch a', A' u. s. w. bezeichnet, so ergiebt sich leicht, daß in einem dieser vier Dreiecke der Winkel A (oder A') von zwei spitzen Seiten eingeschlossen sein muß. Wenn z. B. in I eine der beiden Seiten c und b stumpf ist, so ist dies nicht der Fall in II oder IV, und wenn beide stumpf sind, so ist dies in III nicht der Fall. Für eins dieser Dreiecke gilt also der Beweis des §. 103. Es sei dies der Fall für das Dreieck I, und es sei also

Fig. 32.



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Um diese Gleichung auf die Stücke des Dreiecks II überzuführen, setzt man $\cos a = -\cos a'$, $\cos b = -\cos b'$, $\sin b = \sin b'$, $\cos A = -\cos A'$ und erhält:

$$-\cos a' = -\cos b' \cos c + \sin b' \sin c . (-\cos A'),$$

oder $\cos a' = \cos b' \cos c + \sin b' \sin c \cos A'$.

Die Gleichung gilt also auch für das Dreieck II, und ebenso für das Dreieck IV.

Für das Dreieck III nimmt die Gleichung folgende Gestalt an, wenn man $\cos c = -\cos c'$, $\cos b = -\cos b'$, $\sin c = \sin c'$, $\sin b = \sin b'$ setzt:

$$\cos a = (-\cos b').(-\cos c') + \sin b' \sin c' \cos A,$$
$$= \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A.$$

Die in §. 103 aufgestellten Gleichungen sind also gültig, wenn der in ihnen vorkommende sphärische Winkel von zwei spitzen Seiten, oder einer spitzen und einer stumpfen, oder von zwei stumpfen Seiten eingeschlossen ist.

§. 105. Zusatz.

Ist in §. 103 einer der beiden Winkel b und c gleich R, oder sind es beide, so ist der gegebene Beweis nicht mehr anwendbar, weil alsdann die Tangente und die Secante des rechten Winkels sich nicht schneiden.

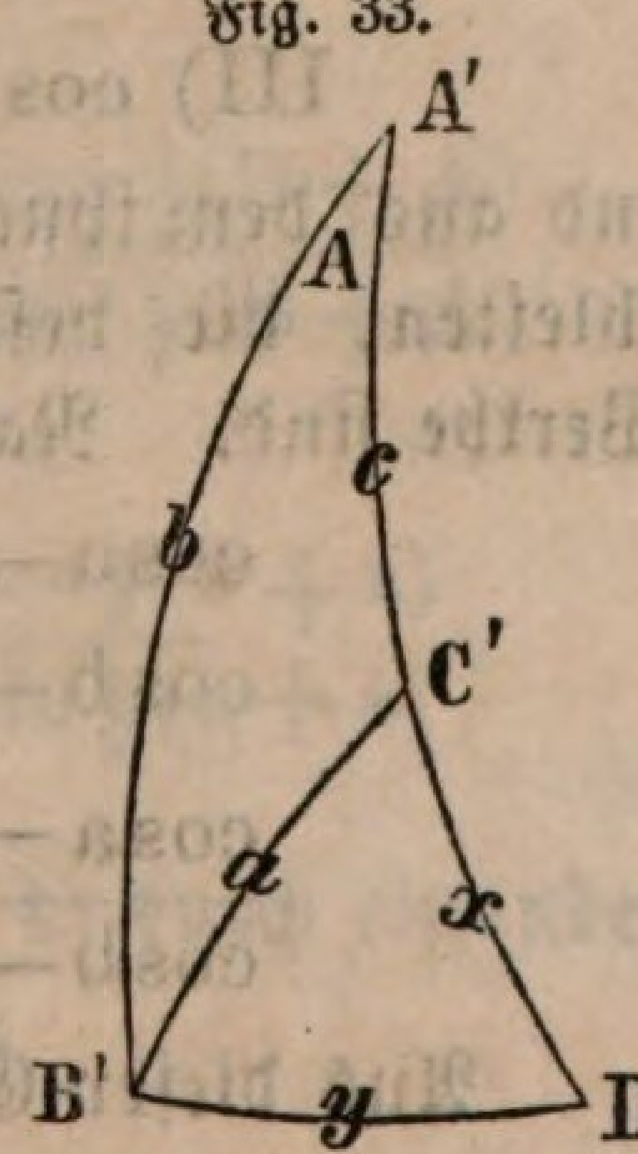
1) Es sei (Fig. 32.) $b = R$ und $c = R$, (folglich auch $B = R$, $C = R$).

Alsdann ist $a = A$, $\cos a = \cos A$ (vergl. §. 65, Anm. 2). Dasselbe Resultat würde man aber auch erhalten, wenn man in 1) des §. 103 $b = R$ und $c = R$ setzte, und diese Gleichung ist daher auch für den vorliegenden Fall anwendbar.

2) Es sei $b = R$, $c \gtrless R$.

Alsdann muß es unter den in Fig. 32 angegebenen Dreiecken eins geben, bei welchen $c < R$ ist. Ist in (Fig. 33.) A'B'C' ein solches, so verlängere man A'C' bis D' zu einem Viertelkreisbogen; es ist also in diesem Falle $A'B' = R'$, $A'D' = R$, folglich auch W. $D = R$, $y = A$. Im Dreieck C'B'D' hat man nun, wenn nicht etwa $y = R$ ist, $\cos a = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos D$, oder $\cos a = \sin c \cos A$, (weil $y = A$, $x = R - c$ ist). Dasselbe Resultat würde man aber auch erhalten, wenn man in 1) des §. 103 $b = R$ setzte. — Wäre im Dreieck C'B'D' auch $y = R$, während zugleich $A'B' = R$ und $A'D' = R$ ist, so wäre a und überhaupt jeder von B' nach A'D' gezogene Bogen eines Hauptkreises gleich R, ferner auch $A = R$. Man erhielte alsdann $\cos a = o$, dasselbe Resultat, welches man in 1) des §. 103 erhalten würde, wenn man $b = R$ und $A = R$ setzte.

Fig. 33.



Der Lehrsatz des §. 103 ist folglich für jedes sphärische Dreieck richtig.

§. 106. Lehrsatz.

Für jedes sphärische Dreieck gelten folgende Gleichungen:

1) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$;

2) $\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$;

3) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$.

Beweis zu 1). Man lege ein beliebiges körperliches Dreieck zu Grunde. Für das Ergänzungsdreieck, dessen Winkel durch A', B', C', und dessen Seiten durch a', b', c' bezeichnet werden mögen, gilt nun nach 1) des §. 103 die Gleichung

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Da aber (§. 21) je eine Seite des einen Dreiecks mit dem zugehörigen Winkel des anderen sich zu 2R ergänzt, so ist $a' = 2R - A$, folglich $\cos a' = \cos(2R - A) = -\cos A$, $\sin b' = \sin(2R - B) = \sin B$ u. s. w. Setzt man diese Werthe in obiger Gleichung ein, so erhält man

$$-\cos A = (-\cos B).(-\cos C) + \sin B \sin C.(-\cos a),$$

oder $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$.

Anm. Die Beweise zu 2) und 3) werden ebenso geführt.

§. 107. Zusatz.

Aus den drei Gleichungen:

I) $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$,

II) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

III) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$,

und aus den ihnen entsprechenden lassen sich einige neue Gleichungen ableiten, die besonders für logarithmische Berechnungen von großem Werthe sind. Nach II) erhält man:

$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$, und

$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B$, daher

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin b \cos A}{\sin a \cos B} = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B}.*)$$

Aus dieser Gleichung folgt nun

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} + 1 = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B} + 1, \text{ oder}$$

*) Weil $\sin b : \sin a = \sin B : \sin A$ ist.

$$1)\ \frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (B + A)}{\sin A \cos B}.$$

Es folgt ferner

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} - 1 = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B} - 1,\ \text{oder}$$

$$2)\ \frac{(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (B - A)}{\sin A \cos B}.$$

Dividirt man 1) durch 2), so erhält man:

$$\frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)} = \frac{\sin (B + A)}{\sin (B - A)},$$ oder (§. 28 und §. 4 der Trigonometrie):

$$3)\ \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(b - a) \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(b + a) \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B + A) \cos \frac{1}{2}(B + A)}{\sin \frac{1}{2}(B - A) \cos \frac{1}{2}(B - A)}.$$

Aus III) erhält man auf demselben Wege:

$$4)\ \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(B - A) \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(B + A) \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(b + a) \cos \frac{1}{2}(b + a)}{\sin \frac{1}{2}(b - a) \cos \frac{1}{2}(b - a)}.$$

Aus I) erhält man:

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A},$$ oder (§. 28 der Trigonometrie):

$$5)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b - a) \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(b + a) = \frac{\sin \frac{1}{2}(B - A) \cos \frac{1}{2}(B + A)}{\cos \frac{1}{2}(B - A) \sin \frac{1}{2}(B + A)},$$

oder, umgekehrt geschrieben,

$$6)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - A) \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(B + A) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b - a) \cos \frac{1}{2}(b + a)}{\cos \frac{1}{2}(b - a) \sin \frac{1}{2}(b + a)}.$$

Wenn man nun 5) und 3), ferner auch 6) und 4) durch einander dividirt, oder mit einander multiplicirt, so erhält man:

$$\text{I.}\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b - a) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c . \frac{\sin \frac{1}{2}(B - A)}{\sin \frac{1}{2}(B + A)};$$

$$\text{II.}\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(b + a) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c . \frac{\cos \frac{1}{2}(B - A)}{\cos \frac{1}{2}(B + A)};$$

$$\text{III. } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-A) = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)};$$

$$\text{IV. } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+A) = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)}.$$

Diese Gleichungen, die natürlich für beliebige Seiten und Winkel gelten, heißen die Neper'schen Analogieen.

Anm. Aus diesen vier Gleichungen läßt sich noch eine neue Beziehung zwischen Seiten und Winkeln ableiten. Dividirt man I durch II, so erhält man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-a) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+a) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+A)$.

Da nun den größeren Winkeln immer die größeren Seiten, zwei gleichen Winkeln immer zwei gleiche Seiten gegenüberliegen, so ist $b \gtreqless a$, je nachdem $B \gtreqless A$ ist. Es hat daher $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-a)$ immer dasselbe Vorzeichen, wie $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)$, folglich auch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+a)$ dasselbe wie $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+A)$, und es muß also $\frac{1}{2}(a+b) \gtreqless R$ sein, je nachdem $\frac{1}{2}(A+B) \gtreqless R$ ist.

§. 108. Zusatz.

Mit den bis jetzt gegebenen Formeln läßt sich die Berechnung der sphärischen Dreiecke ausführen. Nach der Natur der gegebenen drei Stücke sind sechs Hauptaufgaben zu stellen. Es können gegeben sein 1) 3 Seiten, 2) 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel, 3) 2 Seiten und 1 Gegenwinkel, 4) 1 Seite und 2 anliegende Winkel, 5) 1 Seite, 1 anliegender und 1 Gegenwinkel, 6) 3 Winkel.

Anm. Ist ein sphärisches Dreieck rechtwinklig, ist z. B. $C = R$, so sind die zur Berechnung dienenden Formeln von einfacherer Gestalt, weil $\sin C = 1$, $\cos C = 0$ ist. Man erhält alsdann

I. aus §. 101:

1) $\sin A : \sin R = \sin a : \sin c$, oder $\sin a = \sin c \sin A$;

2) $\sin B : \sin R = \sin b : \sin c$, oder $\sin b = \sin c \sin B$;

II. aus §. 103:

3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos R$, oder $\cos c = \cos a \cos b$;

III. aus §. 106:

4) $\cos A = -\cos B \cos R + \sin B \sin R \cos a$, oder
$\cos A = \sin B \cos a$; $\cos a = \cos A : \sin B$;

5) $\cos R = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$, oder
$\cos A \cos B = \sin A \sin B \cos c$, oder $\cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$.

Aus 1) und 4) erhält man außerdem

6) $\operatorname{tg} a = \sin c \operatorname{tg} A \sin B = \sin b \operatorname{tg} A$ (nach 2).

§. 109. Aufgabe.

Aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sollen die drei Winkel berechnet werden.

Auflösung. Aus 1) des §. 103 ergiebt sich

$$\cos A = (\cos a - \cos b \cos c) : \sin b \sin c.$$

Um eine bequemere Form zu erhalten, setzt man

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

ferner $1 + \cos A = 1 + \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \dfrac{-\cos(b+c) + \cos a}{\sin b \sin c}$.

Hieraus erhält man

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{-\cos(b+c) + \cos a}.$$

Nun ist $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{A}{2}$;

ferner $\dfrac{\cos(b-c) - \cos a}{-\cos(b+c) + \cos a} = \dfrac{-2 \sin \frac{1}{2}(b-c+a) \sin \frac{1}{2}(b-c-a)}{-2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a-b-c)} =$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(-a+b+c)} = \frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-a)},$$

wenn man $\frac{1}{2}(a+b+c)$ durch s bezeichnet.

Schließlich ist also:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-a)}}.$$

Für $\operatorname{tg} \dfrac{B}{2}$ und $\operatorname{tg} \dfrac{C}{2}$ erhält man entsprechende Gleichungen.

Anm. Die Aufgabe läßt nur eine Lösung zu, da keiner der Winkel im dritten oder vierten Quadranten liegen darf.

§. 110. Aufgabe.

Aus zwei Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C eines sphärischen Dreiecks sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung I. Es ist $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$.

Setzt man nun $\sin b \cos C = \cos b \operatorname{tg} v$, so ist

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \cos b \operatorname{tg} v$$
$$= \cos b (\cos a + \sin a \operatorname{tg} v)$$
$$= \frac{\cos b \cos (a - v)}{\cos v}.$$

Ist c gefunden, so erhält man A und B durch die Gleichungen

$$\sin C : \sin A = \sin c : \sin a;$$
$$\sin C : \sin B = \sin c : \sin b.$$

Auflösung II. Aus III. und IV. der Neper'schen Analogieen (§. 107) erhält man unmittelbar A und B; C erhält man alsdann aus einer der eben angeführten Gleichungen.

Anm. Die Aufgabe läßt nur eine Lösung zu.

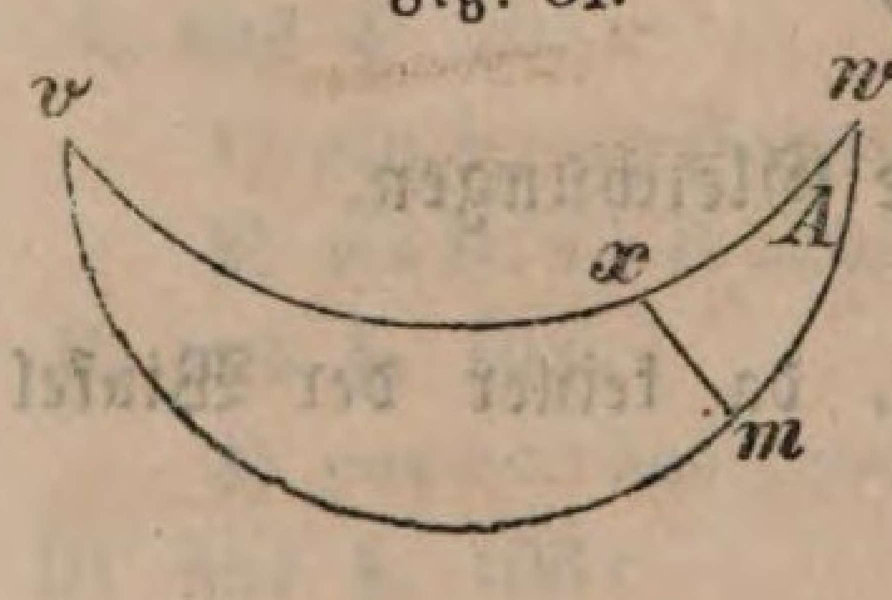
§. 111. Aufgabe.

Aus zwei Seiten a und b und einem Gegenwinkel A eines sphärischen Dreiecks sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung. Man erhält zunächst $\sin B = (\sin b \sin A) : \sin a$. Ist aber B gefunden, so erhält man c und C durch die Neper'schen Analogieen.

Die Aufgabe kann in einzelnen Fällen zwei Lösungen zulassen, weil B durch seinen Sinus gegeben ist. Man kann alsdann folgende Betrachtung anwenden. Man suche das Dreieck auf geometrischem Wege zu construiren, zeichne (Fig. 34.) zunächst zwei Hauptkreise, welche den sphärischen Winkel A bilden, trage auf dem einen die Seite $b = wx$ ab und suche nun von x aus die Seite a nach dem Halbkreise vmw hinzuziehen. Zieht man die Hülfslinie xm, den Bogen eines Hauptkreises, der auf vmw senkrecht steht, so ist unter allen Hauptkreisbogen, die von x nach vmw gezogen werden können, xm der kleinste oder größte, je nachdem A spitz oder stumpf ist.

Fig. 34.



Es sei nun $A < 90^0$. Construirt man von x aus die Seite a, so trifft dieselbe den Halbkreis vmw gar nicht, wenn $a < xm$ ist, und man erhält dann überhaupt kein Dreieck; sie trifft einmal, wenn $a = xm$, folglich $B = R$ ist; sie trifft zweimal, wenn a kleiner als xw und

kleiner als xv, jedoch größer als xm ist; sie trifft einmal, wenn a kleiner als einer der Bogen xw oder xv, jedoch nicht zugleich kleiner als der andere ist.

Ist $A > 90^0$, so erhält man ein ähnliches Resultat.

Ist $A = 90^0$, so fällt xm mit xw oder xv zusammen, und man erhält nur ein Dreieck, außerdem jedoch ein symmetrisches. Ist zugleich $xw = R$, so muß auch $B = R$ sein, und die Aufgabe bleibt unbestimmt.

Das Endresultat dieser Betrachtung ist:

Man erhält ein Dreieck,

1) wenn $A = R$, 2) wenn $B = R$ ist, 3) wenn a seiner Größe nach zwischen b und $(2R - b)$ liegt;

und man erhält zwei Dreiecke,

wenn a größer als b und $(2R - b)$, oder wenn es kleiner als beide Bogen ist, zugleich aber auch weder A, noch B rechte Winkel sind.

Anm. Man kann dasselbe Resultat, wenngleich in anderer Form, auch in folgender Weise erhalten:

Nach §. 107 Anm. ist $\frac{1}{2}(A + B) \gtreqless 90^0$, je nachdem $\frac{1}{2}(a + b) \gtreqless 90^0$ ist.

1) Ist $\frac{1}{2}(a + b) = 90^0$, so ist $A + B = 180^0$. Folglich ist $B = 180^0 - A$ und hat also nur einen Werth.

2) Ist $\frac{1}{2}(a + b) < 90^0$, so ist $A + B < 180^0$. Ist nun $A \geq 90^0$, so ist B ein spitzer Winkel; ist aber $A < 90^0$, so kann B ebensowohl spitz, als stumpf sein, letzteres indeß nur dann, wenn zugleich $A + B < 180^0$ ist.

3) Ist $\frac{1}{2}(a + b) > 90^0$, so ist $A + B > 180^0$. Ist nun $A \leq 90^0$, so ist B stumpf; ist aber $A > 90^0$, so kann B ebensowohl stumpf, als spitz sein, den Fall ausgenommen, wo $a < b$, folglich $A < B$ ist, wo also B nur stumpf sein kann.

§. 112. Aufgabe.

Aus einer Seite c und den beiden anliegenden Winkeln A und B eines sphärischen Dreiecks sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung. Man erhält a und b aus I und II der Neper'schen Analogieen, und C durch die Gleichung $\sin A : \sin C = \sin a : \sin c$.

Anm. Die Aufgabe läßt nur eine Lösung zu.

§. 113. Aufgabe.

Aus einer Seite a, dem Gegenwinkel A und dem anliegenden Winkel B eines sphärischen Dreiecks sollen die übrigen Stücke berechnet werden.

Auflösung. Man erhält zunächst b durch die Gleichung $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$. Ist aber b gefunden, so erhält man C und c durch die Neper'schen Analogieen.

Anm. Die Aufgabe kann zwei Lösungen zulassen. Nun ist das fragliche Dreieck bestimmt, wenn sein Ergänzungsdreieck bestimmt ist. Von diesem kennt man zwei Seiten, nämlich (2R—A) und (2R—B), ferner den nicht eingeschlossenen Winkel (2R—a), kann also bestimmen, ob es zwei Lösungen oder nur eine zuläßt.

§. 114. Aufgabe.

Aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks sollen die drei Seiten berechnet werden.

Auflösung. Es ist $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$.

Aus dieser Gleichung erhält man durch dieselbe Umformung, die in §. 109 angewendet worden ist, die bequemere Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A-B+C)}}.$$

Anm. 1. Die Aufgabe läßt nur eine Lösung zu.

Anm. 2. Wenn man aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die drei Winkel berechnet, so berechnet man damit zugleich aus den drei Winkeln des Polardreiecks dessen drei Seiten. Es geht hieraus hervor, daß für die Aufgaben der §§. 112—114 eigentlich die Lösung schon durch die vorangehenden Aufgaben gegeben war.

§. 115. Erklärung.

Werden die drei Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks durch gerade Linien (Sehnen) verbunden, so entsteht ein ebenes Dreieck, welches man das Sehnendreieck des sphärischen nennt. Ist man nun im Stande, die Beziehungen zwischen beiden Dreiecken anzugeben, so ist dadurch ein Mittel gefunden, sphärische Dreiecke mit dem Cirkel sowohl zu construiren, wie auch zu messen. Die Beziehungen zwischen beiden Dreiecken ergeben sich aber leicht daraus, daß die Sehne eines Bogens doppelt so groß ist, als der Sinus des halben Bogens, wenn der Radius gleich 1 gesetzt wird. Sind also a, b, c die Seiten des sphärischen, a', b', c' die entsprechenden Seiten des Sehnendreiecks, so erhält man:

$$a' = 2\sin\tfrac{1}{2}a;\ b' = 2\sin\tfrac{1}{2}b;\ c' = 2\sin\tfrac{1}{2}c; \text{ oder}$$

1) $\sin\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a'$; $\sin\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b'$; $\sin\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c'$.

Da ferner nach 1)

$1-2\sin^2\frac{1}{2}a = 1-\frac{1}{2}a'^2$, $1-2\sin^2\frac{1}{2}a$ aber auch gleich $\cos a$ ist, so ergiebt sich ferner:

2) $\cos a = 1-\frac{1}{2}a'^2$; $\cos b = 1-\frac{1}{2}b'^2$; $\cos c = 1-\frac{1}{2}c'^2$.

Vermittelst dieser zwei Gleichungen ist es nun leicht, aus dem einen Dreiecke das andere zu bestimmen.

Beispiel. Auf einer Kugel, deren Radius $= 20'$ ist, soll ein sphärisches Dreieck construirt werden, dessen Seiten a, b, c gleich 80^0, 70^0, 60^0 sind. Wie groß sind die Seiten a', b', c' des Sehnendreiecks?

Auflösung. Es ist $a' = 2.20.\sin 40^0 = 25,711\ldots'$;
$b' = 2.20.\sin 35^0 = 22,943\ldots'$;
$c' = 2.20.\sin 30^0 = 20'$.

§. 116. Vermischte Aufgaben.

I. Von zwei Punkten A und B auf der Erdoberfläche kennt man die geographischen Längen und Breiten. Es soll die sphärische Entfernung dieser Punkte bestimmt werden unter der Voraussetzung, daß die Erde eine vollkommene Kugel ist.

Auflösung. Man berechne das sphärische Dreieck, dessen drei Eckpunkte A, B und der Nordpol P sind. Liegt nun z. B. A auf der nördlichen Halbkugel, und ist seine Breite gleich b, so ist die Seite PA gleich 90^0-b; liegt es aber auf der südlichen Halbkugel, so ist $PA = 90^0+b$. Man kann jedoch unter allen Umständen $PA = 90^0-b$ setzen, wenn man feststellt, daß die Grade nördlicher Breite positiv, die Grade südlicher Breite negativ in Rechnung kommen sollen; aus demselben Grunde müssen die Grade östlicher Länge negativ genommen werden, wenn die Grade westlicher Länge positiv sein sollen.

Hat nun A die Breite b und die Länge l, B die Breite b' und die Länge l', so ist im sphärischen Dreiecke $PAB: PA = 90^0-b$, $PB = 90^0-b'$, und der von PA und PB eingeschlossene Winkel ist gleich $l-l'$.*) Die weitere Lösung ergiebt sich alsdann aus §. 110.

Ist z. B. $b = +20^0$, $l = +50^0$, $b' = -30^0$, $l' = +120^0$, so ist die gesuchte Entfernung in Graden gleich $83^0 50' 19,8\ldots''$, in Meilen gleich 1254,48... M., wenn der Radius gleich 858 Meilen gesetzt wird.

*) Die Differenz $l-l'$ muß stets positiv genommen werden.

II. Von drei Punkten A, B, C auf der Erdoberfläche, welche nicht auf demselben Hauptkreise liegen, kennt man die geographischen Längen und Breiten. Es soll der Inhalt des sphärischen Dreiecks A B C unter der bei I. gemachten Voraussetzung berechnet werden.

Auflösung. Die Seiten AB, AC, CB werden mit Hülfe von I. berechnet, und aus den Seiten dann die drei sphärischen Winkel x, y, z des Dreiecks. Kennt man aber diese, so ist (nach §. 77):

$$J = \frac{x + y + z - 180^0}{720^0} . 4 r^2 \pi = \frac{S - 180^0}{720^0} . K.$$

III. Von allen Eckpunkten eines Polygons auf der Erdoberfläche kennt man die geographischen Längen und Breiten. Es soll unter der bei I. gemachten Voraussetzung der Inhalt dieses Polygons berechnet werden.

Auflösung. Aus einer Ecke A ziehe man Bogen größter Kreise nach allen übrigen Ecken und zerlege so das sphärische n eck in n — 2 sphärische Dreiecke. Für jedes dieser Dreiecke erhält man dann aus I. und II. die Seiten und Winkel, und alsdann ist (nach §. 78):

$$J = \frac{S - (n - 2) 180^0}{720^0} . K.$$

IV. Von einem schiefen Parallelepipedum kennt man drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten, ferner auch die Winkel, welche diese Kanten mit einander bilden. Es soll der Inhalt des Parallelepipedums berechnet werden.

Auflösung. Es seien a und b zwei Grundkanten, c eine Seitenkante; der von a und b gebildete Kantenwinkel werde bezeichnet durch (W. ab), die übrigen in entsprechender Weise. Nun ist der Inhalt des Parallelepipedums gleich dem Produkte aus Grundebene und Höhe (G.H).

Es ist aber:

$$1)\ G = a . b . \sin (W. ab).$$

Ferner ist der senkrechte Abstand der Grundkante b von der in derselben Seitenebene ihr gegenüberliegenden Kante gleich c. sin (W. bc) = h, und die Höhe H des Parallelepipedums ist gleich dem Produkte aus h und dem Sinus des Flächenwinkels x, welchen die Grundebene mit der zu h gehörenden Seitenebene bildet. Es ist also

$$2)\ H = h . \sin x = c . \sin (W. bc) . \sin x, \text{ und}$$

$$3)\ J = a . b . c . \sin (W. ab) . \sin (W. bc) . \sin x.$$

In dieser Gleichung (3) ist noch x zu bestimmen. Da aber a, b und c ein körperliches Dreieck bilden, dessen Seiten die gegebenen Kantenwinkel sind, so ergeben sich die Winkel desselben aus §. 109.

V. Von einem schiefwinkligen Parallelepipedum kennt man drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten und auch die Diagonalen, die von dieser Ecke aus in den drei zusammenstoßenden Ebenen gezogen werden können. Es soll der Inhalt des Parallelepipedums bestimmt werden.

Auflösung. Von jedem der drei Parallelogramme, welche in der Ecke zusammenstoßen, kennt man die Seiten und eine Diagonale, kann also die Winkel desselben berechnen. Dadurch ist die Aufgabe zurückgeführt auf IV.

VI. Es soll in einem körperlichen Dreiecke der Winkel bestimmt werden, den eine der drei Kanten mit ihrer Projection auf die gegenüberliegende Seite bildet.

Auflösung. Sind a, b, c die drei Seiten, wird die von a und b gebildete Kante auf c projicirt, und bildet sie mit ihrer Projection den Winkel z, so ist z die Seite eines rechtwinkligen körperlichen Dreiecks, von dem man die Seite a, den der Seite a gegenüberliegenden rechten Winkel, und den der Seite z gegenüberliegenden Winkel B kennt. Man hat alsdann die Gleichung $\sin a : \sin z = \sin R : \sin B$, daher

$$\sin z = \sin a . \sin B.$$

Soll $\sin B$ durch die Seiten a, b, c ausgedrückt werden, so ist §. 109 zu benutzen.

VII. Es sollen in einem körperlichen Dreiecke die Winkel bestimmt werden, welche die Projection einer Kante auf die gegenüberliegende Seite mit den beiden anderen Kanten bildet.

Auflösung. Es seien a, b, c die drei Seiten des Dreiecks; die von a und b gebildete Kante werde auf c projicirt und bilde mit ihrer Projection den Winkel z; die Projection bilde ferner mit der Kante, in welcher a und c sich schneiden, den Winkel x, mit der anderen also den Winkel (c—x). In den zwei so entstandenen rechtwinkligen Dreiecken ist nun (nach §. 108):

$$\cos a = \cos z \cos x,$$
$$\cos b = \cos z \cos (c - x),$$

folglich $\frac{\cos b}{\cos a} = \frac{\cos(c-x)}{\cos x} = \frac{\cos c \cos x + \sin c \sin x}{\cos x} =$

$= \cos c + \sin c \operatorname{ctg} x$, also schließlich

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos b}{\cos a \sin c} - \operatorname{ctg} c.$$

Ebenso ist $\operatorname{tg}(c-x) = \frac{\cos a}{\cos b \sin c} - \operatorname{ctg} c.$

VIII. Es soll die Projection x eines Winkels o auf eine gegebene Ebene bestimmt werden, wenn die Winkel p und q gegeben sind, welche die Schenkel a und b des Winkels o mit der Ebene bilden.

Auflösung. Man lege durch den Scheitelpunkt des Winkels o eine Ebene, welche der gegebenen parallel ist; die Projection von o auf erstere Ebene ist dann ebenfalls gleich x. Legt man ferner durch die Schenkel a und b Ebenen, welche auf der Projectionsebene senkrecht stehen, so steht auch ihre Schneidungslinie senkrecht auf derselben. Diese Schneidungslinie bildet oberhalb der Ebene des Winkels o mit dem Schenkel a den Winkel R—p, mit dem Schenkel b den Winkel R—q, und man hat also oberhalb der Ebene des Winkels o ein körperliches Dreieck, dessen Seiten gegeben sind durch o, R—p und R—q, und in welchem der Winkel, welcher o gegenüber liegt, gleich x ist. Man erhält aber alsdann (§. 109):

$$\cos x = \frac{\cos o - \cos(R-p)\cos(R-q)}{\sin(R-p)\sin(R-q)} = \frac{\cos o - \sin p \sin q}{\cos p \cos q}.$$

(Ueber die Umformung des erhaltenen Ausdrucks vergl. §. 109.)*)

Anm. Die schönsten Anwendungen findet die sphärische Trigonometrie in der Astronomie. Dieselben müssen aber hier übergangen werden, da die dazu nöthigen Erklärungen nicht gut in der Kürze gegeben werden können.

---

*) Vergleiche die Auflösung dieser Aufgabe auf Seite 43.

Aufgaben zur numerischen Berechnung.*)

	A	B	C
1)	110° 10′ 0″;	70° 20′ 50″;	133° 18′ 0″;
2)	128° 58′ 0″;	106° 1′ 6″;	141° 15′ 0″;
3)	128° 18′ 46″;	109° 39′ 10″;	141° 32′ 0″;
4)	94° 15′ 0″;	126° 30′ 0″;	60° 45′ 0″;
5)	40° 23′ 27″;	32° 30′ 7,9″;	131° 11′ 20″;
6)	48° 4′ 23″;	69° 12′ 22″;	92° 9′ 43″;

	a	b	c
1)	147° 5′ 32″;	33° 1′ 51″;	155° 5′ 13″;
2)	133° 26′ 19″;	64° 50′ 53″;	144° 13′ 45″;
3)	127° 30′ 0″;	72° 12′ 53″;	141° 1′ 33″;
4)	121° 20′ 11″;	136° 29′ 21″;	48° 21′ 18,7″;
5)	59° 20′ 0″;	45° 30′ 0″;	92° 40′ 0″;
6)	45° 30′ 0″;	63° 40′ 0″;	73° 20′ 0″.

*) Bei den Aufgaben 1) — 4) sind zu der Berechnung die Winkel, bei den übrigen die Seiten zu Grunde gelegt.

Druck von Gebrüder Katz in Dessau.